

Berechnung von Spannungsfunktionen  
für Scheiben unter beliebiger  
Belastung

Doktorarbeit  
zur  
Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur  
der  
Abteilung für Bauingenieurwesen  
der Ruhr-Universität Bochum

von

J e r n e j T o p o l e

Bochum 1977



Berechnung von Spannungsfunktionen  
für Scheiben unter beliebiger  
Belastung

Doktorarbeit  
zur  
Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur  
der  
Abteilung für Bauingenieurwesen  
der Ruhr-Universität Bochum

von

J e r n e j T o p o l e

Bochum 1977

Die vorliegende Arbeit entstand in den  
Jahren 1972 bis 1976.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. W. Zerna  
danke ich an dieser Stelle für die freundliche  
Unterstützung und die Übernahme des Referats,  
den Herren Professor Dr.-Ing. T. Lehmann und  
Professor Dr.-Ing. E. Krabbe für die Übernahme  
der Korreferate.

Jernej Topole

Doktorarbeit eingereicht am: 15. Juli 1976  
Tag der mündlichen Prüfung: 18. April 1977  
Berichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. W. Zerna  
Prof. Dr.-Ing. T. Lehmann  
Prof. Dr.-Ing. E. Krabbe



## INHALTSVERZEICHNIS

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Literaturverzeichnis                                                     | 3  |
| Bezeichnungen                                                            | 8  |
| 1. <u>Allgemeines</u>                                                    | 11 |
| 2. <u>Übersicht über die Lösungsmethoden des Scheibenproblems</u>        | 14 |
| 2.1 Analytische Lösungen                                                 | 14 |
| 2.2 Näherungslösungen                                                    | 17 |
| 2.3 Grundgleichungen des ebenen Spannungszustandes                       | 22 |
| 3. <u>Randbedingungen der Scheibe</u>                                    | 26 |
| 3.1 Randkräfte der Scheibe                                               | 27 |
| 3.2 Scheibenumriß als Stab                                               | 29 |
| 3.3 Scheibenumriß als Scheibenrand                                       | 31 |
| 3.4 Zusammenhang                                                         | 37 |
| 4. <u>Das Lösungsverfahren</u>                                           | 40 |
| 4.1 Wahl des Lösungsverfahrens                                           | 40 |
| 4.2 Differenzengleichungen für "dynamische Relaxation"                   | 43 |
| 4.2.1 Festlegungen des Rechenrasters                                     | 43 |
| 4.2.2 Differenzengleichungen für das Scheibeninnere                      | 45 |
| 4.2.3 Differenzengleichungen an koordinatenparallelen Rändern            | 51 |
| 4.2.4 Differenzengleichungen an einspringenden Ecken                     | 54 |
| 4.2.5 Verschiebungsänderungen für den Zeitpunkt $t = \frac{\Delta t}{2}$ | 60 |

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5. <u>Numerische Integration</u>                                            | 62  |
| 5.1 Wahl der Summationsgleichung                                            | 62  |
| 5.2 Empfindlichkeit der Summationsgleichung                                 | 65  |
| 5.3 Bestimmung der Spannungsfunktion                                        | 69  |
| 6. <u>Stabilitätskriterium für die numerische Berechnung</u>                | 72  |
| 6.1 Einführung                                                              | 72  |
| 6.2 Einmassenschwinger                                                      | 73  |
| 6.3 Maschenelement durch Spannung $\sigma_{\theta_1}$ belastet              | 79  |
| 6.4 Maschenelement durch Schubspannung $\tau_{\theta_1 \theta_2}$ belastet  | 82  |
| 6.5 Numerische Untersuchung des Grenzüntervalles für Zeitschritt $\Delta t$ | 85  |
| 6.6 Abschätzung des Dämpfungskoeffizienten K                                | 88  |
| 7. <u>Anwendungsbeispiele</u>                                               | 95  |
| 7.1 Rechteckige Scheiben                                                    | 95  |
| 7.2 Scheiben mit einspringenden Ecken                                       | 98  |
| 8. <u>Zusammenfassung</u>                                                   | 109 |

Literaturverzeichnis

- [ 1 ]      J. Szabó                      "Höhere Technische Mechanik"  
Springer-Verlag Berlin / Göttingen /  
Heidelberg 1964
  
- [ 2 ]      N.L. Mußhelischwili:    "Einige Grundaufgaben zur mathematischen  
Elastizitätstheorie"  
Carl Hanser-Verlag München 1971
  
- [ 3 ]      J.M. Biggs:                      "Introduction to structural dynamics"  
Mc Graw-Hill Book Company, New-York,  
San Francisco, Toronto, London 1964
  
- [ 4 ]      R. Zurmühl:                      "Praktische Mathematik für Ingenieure  
und Physiker"      Springer-Verlag  
Berlin / Heidelberg / New-York 1965
  
- [ 5 ]      W.H. Bölling:                      "Sickerströmungen und Spannungen in Böden"  
Springer-Verlag Wien / New-York 1972
  
- [ 6 ]      H. Parkus:                      "Mechanik der festen Körper"  
Springer-Verlag Wien 1960
  
- [ 7 ]      H. Lorenz:                      "Grundbau - Dynamik"  
Springer-Verlag Berlin / Göttingen /  
Heidelberg 1960
  
- [ 8 ]      Ch. Tönnies:                      "Praktische und angewandte Mathematik"  
Verlag W. Giradet. Essen 1962
  
- [ 9 ]      R. Becker:                      "Theorie der Wärme"  
Springer-Verlag Berlin / Heidelberg /  
New-York 1966

- [ 10 ] R. Herschel: "Anleitung zum praktischen Gebrauch von Algol 60"  
R. Oldenbourg-Verlag München 1968
- [ 11 ] H. Meschkowski: "Mathematisches Begriffs-Wörterbuch"  
Hochschultaschenbücher Verlag 99/99a
- [ 12 ] A.E. Green - "Theoretical Elasticity"  
W. Zerna: Oxford - At the Clarendon Press 1968
- [ 13 ] Courant-Hilbert: "Methoden der mathematischen Physik I"  
Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New-York 1968
- [ 14 ] Grauert-Lieb: "Differential- und Integralrechnung I - III" Springer-Verlag  
Berlin / Heidelberg / New-York 1968
- [ 15 ] G. Schnellenbach: "Beitrag zur numerischen Berechnung des räumlichen Spannungszustandes in Hohlzylindern mit Ausschnitten"  
Dissertation, Bochum 1969
- [ 16 ] K. Marguerre: "Technische Mechanik"  
Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New-York 1967
- [ 17 ] H.J. Förster: "Kinematik, Kinetik"  
Carl Hanser-Verlag München 1972
- [ 18 ] F. Andermann: "Statik der rechteckigen Scheiben"  
Werner-Verlag . Düsseldorf 1968
- [ 19 ] K. Girkmann: "Flächentragwerke"  
Springer-Verlag . Wien 1963
- [ 20 ] I.N. Bronstein und "Taschenbuch der Mathematik"  
K.A. Semendjajew: Verlag Harri Deutsch - Zürich und Frankfurt/M. 1969

- [ 21 ] E. Ulrich: "Elementare Festigkeitslehre"  
Verlag W. Giradet, Essen 1967
- [ 22 ] V. Hansson: "Zur praktischen Berechnung von Scheiben  
mit beliebiger Geometrie und allgemeinem  
Materialgesetz"  
Dissertation der Ruhr-Universität Bochum  
1972
- [ 23 ] E. Klingbeil: "Tensorrechnung für Ingenieure"  
Hochschultaschenbücherverlag Nr. 197/197a  
1966
- [ 24 ] H. Leipholz: "Festigkeitslehre für den Konstrukteur"  
Springer-Verlag Berlin / Heidelberg /  
New-York 1969
- [ 25 ] H. Schultz: "Beitrag zur Berechnung von Temperatur-  
verteilung und Temperaturspannungen bei  
Reaktordruckbehältern"  
Dissertation der Ruhr-Universität Bochum  
1972
- [ 26 ] G. Hartmann: "Beitrag zur numerischen Berechnung  
allgemeiner dickwandiger Behälter"  
Dissertation der Ruhr-Universität Bochum  
1975
- [ 27 ] J. Mason: "Eine Einführung in die Energie- und  
Variationsmethoden der Elastostatik"  
Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen  
der Ruhr-Universität Bochum  
Mitteilung Nr. 72-3
- [ 28 ] F. Stangenberg: "Berechnung von Stahlbetonbauteilen für  
dynamische Beanspruchungen bis zur Trag-  
fähigkeitsgrenze"  
Dissertation der Ruhr-Universität Bochum  
1973

- [ 29 ] H.L. Peters: "Numerische Lösung der Gleichungen des Spannungs- und Verformungszustandes allgemeiner Flächentragwerke im Rahmen einer linearen Theorie - Scheibe - Platte - Schale"  
Dissertation der Ruhr-Universität Bochum  
1971
- [ 30 ] A. Einstein: "Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie" - gehalten im Mai 1921 an der Universität Princeton  
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn A.G., Braunschweig 1922
- [ 31 ] E. Zellerer: "Über das Kraftfeld einer scheibenartigen Tragwand"  
Die Bautechnik 32 (1955) Heft 7, S. 218
- [ 32 ] Chr. Reißmann und K. Kietzer: "Beispiele für die Anwendung des elektrischen Potentialgleichnisses zur Bestimmung des ebenen Spannungszustandes"  
Die Bautechnik (1964), Heft 5, S. 155
- [ 33 ] H. Eltermann: "Grundlagen der praktischen Matrizenrechnung"  
Hochschultaschenbücher-Verlag Nr. 434<sup>X</sup> - 1969
- [ 34 ] J.R.H. Otter: "Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamics relaxation"  
Nuclear Structural Engineering 1, 1965
- [ 35 ] R. Kuhn: "Bemessung einer Stahlbetonkonstruktion mit Hilfe der Spannungsoptik"  
Der Bauingenieur 26 (1951), Heft 6, S. 177

- [36] W. Bares: "Berechnungstafeln für Platten und Wandscheiben"  
Bauverlag GmbH., Wiesbaden und Berlin  
1971
- [37] G. Jordan-Eugeln/  
F. Reutter: "Formelsammlung zur numerischen  
Mathematik mit Fortran IV-Programmen"  
B.I. Hochschultaschenbücher - Band 106
- [38] E. Hübner: "Technische Schwingungslehre in ihren  
Grundzügen"  
Springer-Verlag Berlin / Göttingen /  
Heidelberg 1967
- [39] K. Klotter: "Technische Schwingungslehre"  
Band 1, 2. Auflage,  
Springer-Verlag Berlin / Göttingen /  
Heidelberg 1961
- [40] H. Waller /  
W. Zingge: "Matrizenmethoden in der Maschinen- und  
Bauwerksdynamik"  
Bibliographisches Institut Mannheim /  
Wien / Zürich 1975  
B.I. - Wissenschaftsverlag
- [41] T. Lehmann: "Elemente der Mechanik" I : Einführung  
II: Elastostatik  
Vieweg, Braunschweig 1975
- [42] O.C. Zienkiewicz: "Methode der finiten Elemente"  
Carl Hanser Verlag, München / Wien 1975
- [43] W. Schleen: "Ein einfaches Verfahren zur Lösung von  
Scheibenaufgaben"  
Beton- und Stahlbetonbau 1964
- [44] A.E.H. Love: "Lehrbuch der Elastizität"  
Autorisierte deutsche Ausgabe  
Druck und Verlag von B.G. Teubner,  
Leipzig und Berlin 1907

B e z e i c h n u n g e n

|                                           |                                                             |                                                                    |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $A ; B$                                   | Hilfsfunktion                                               | $[cm \cdot s^{-2}]$                                                |
| $A$                                       | Übertragungsmatrix                                          |                                                                    |
| $a ; b ; \bar{a} ; \bar{b}$               | Zeitmoment                                                  | $[s]$                                                              |
| $\beta$                                   | Hilfsgröße                                                  |                                                                    |
| $c$                                       | Federsteifigkeit                                            | $[kg \cdot s^{-2}]$                                                |
| $d$                                       | Scheibendicke                                               | $[cm]$                                                             |
| $D$                                       | Dämpfung                                                    | $[s^{-1}]$                                                         |
| $\Delta$                                  | Laplacescher Operator                                       |                                                                    |
| $\Delta t$                                | Zeitintervall                                               | $[s]$                                                              |
| $\Delta t_{Kr}$                           | Kritisches Zeitintervall                                    | $[s]$                                                              |
| $\Delta x ; \Delta y$                     | Maschenweite                                                | $[cm]$                                                             |
| $E$                                       | Elastizitätsmodul                                           | $[kp \cdot cm^{-2} ; kg \cdot cm \cdot s^{-2} \cdot cm^{-2}]$      |
| $\epsilon_x ; \epsilon_y ; \epsilon_{xy}$ | Verzerrungen                                                |                                                                    |
| $F$                                       | Airysche Spannungsfunktion<br>auf Scheibendicke bezogen     | $[kp \cdot cm \cdot cm^{-1}]$                                      |
| $\frac{\partial F}{\partial n}$           | Ableitung der Spannungsfunktion<br>in Richtung der Normalen | $[kp \cdot cm^{-1} ;$<br>$kg \cdot cm \cdot s^{-2} \cdot cm^{-1}]$ |
| $\varphi$                                 | Winkel zwischen $\sigma_x$ und $\sigma_1$                   |                                                                    |
| $G$                                       | Schubmodul                                                  | $[kp \cdot cm^{-2} ; kg \cdot cm \cdot s^{-2} \cdot cm^{-2}]$      |
| $H ; H'$                                  | Schnittkräfte                                               | $[kp ; kg \cdot cm \cdot s^{-2}]$                                  |
| $i ; k ; l$                               | Punktbezeichnung                                            |                                                                    |
| $K$                                       | Dämpfungskoeffizient                                        |                                                                    |
| $K_M$                                     | Dämpfungskoeffizient des<br>Maschenelementes                |                                                                    |

|                                           |                                                   |                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $k$                                       | Dämpfung                                          | $[ \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} ]$                                                                                                                 |
| $\lambda ; \mu$                           | Lamésche Konstanten                               | $[ \text{kp} \cdot \text{cm}^{-2} ; \text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-2} ]$                                           |
| $m$                                       | Masse                                             | $[ \text{kg} ]$                                                                                                                                     |
| $M$                                       | Biegemoment                                       | $[ \text{kp} \cdot \text{cm} ; \text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm} ]$                                                     |
| $n$                                       | Normale                                           |                                                                                                                                                     |
| $n = t / \Delta t$                        | Zeitschritt                                       |                                                                                                                                                     |
| $N$                                       | Längskraft                                        | $[ \text{kp} ; \text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} ]$                                                                                     |
| $\nu$                                     | Querdehnungszahl                                  |                                                                                                                                                     |
| $\omega$                                  | Kreisfrequenz                                     | $[ \text{s}^{-1} ]$                                                                                                                                 |
| $\bar{\omega} ; \bar{\omega}_{\text{HS}}$ | Fiktive Kreisfrequenz                             | $[ \text{s}^{-1} ]$                                                                                                                                 |
| $p$                                       | Äußere Belastung<br>(auf Scheibendicke bezogen)   | $[ \text{kp} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} ; \text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} ]$ |
| $P$                                       | Äußere Einzelkraft<br>(auf Scheibendicke bezogen) | $[ \text{kp} \cdot \text{cm}^{-1} ; \text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-1} ]$                                           |
| $\rho$                                    | Dichte                                            | $[ \text{kg} \cdot \text{cm}^{-3} ]$                                                                                                                |
| $s$                                       | Umrißkoordinate                                   | $[ \text{cm} ]$                                                                                                                                     |
| $S_1 ; S_2$                               | Hilfswerte                                        |                                                                                                                                                     |
| $\sigma_x ; \sigma_y$                     | Spannungen                                        | $[ \text{kp} \cdot \text{cm}^{-2} ; \text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-2} ]$                                           |
| $t$                                       | Zeit                                              | $[ \text{s} ]$                                                                                                                                      |
| $T$                                       | Periode                                           | $[ \text{s} ]$                                                                                                                                      |
| $\tau_{xy}$                               | Schubspannung                                     | $[ \text{kp} \cdot \text{cm}^{-2} ; \text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-2} ]$                                           |
| $\theta_1 ; \theta_2$                     | Koordinaten                                       | $[ \text{cm} ]$                                                                                                                                     |
| $u ; v$                                   | Verschiebungen                                    | $[ \text{cm} ]$                                                                                                                                     |
| $\dot{u} ; \dot{v}$                       | Zeitliche Änderungen der<br>Verschiebungen        | $[ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1} ]$                                                                                                                 |

|            |                                 |                                   |
|------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| $V ; V'$   | Schnittkräfte                   | $[kp ; kg \cdot cm \cdot s^{-2}]$ |
| $x ; y$    | Kartesische Koordinaten         | $[cm]$                            |
| $\dot{x}$  | Geschwindigkeit                 | $[cm \cdot s^{-1}]$               |
| $\ddot{x}$ | Beschleunigung                  | $[cm \cdot s^{-2}]$               |
| $X_t$      | Übertragungsvektor für Zeit $t$ |                                   |

## 1. Allgemeines

Für die Lösung des Scheibenproblems beim homogenen, isotropen Werkstoff stehen in der linearen Elastostatik unter Vernachlässigung der Massenkräfte zwei Wege zur Verfügung:

Beim ersten Weg lassen sich mit Hilfe der Verschiebungsfunktion die Verschiebungen ableiten. Ein zweiter Weg ermittelt mit Hilfe der Spannungsfunktion die Spannungen der Scheibe.

Ebenso wie bei der Spannungsfunktion kann auch bei der Verschiebungsfunktion das Gleichungssystem auf eine Bi-Potentialgleichung mit entsprechenden Randbedingungen zurückgeführt werden [ 41 ]. Dabei ist zu erwähnen, daß die Spannungsfunktion beide Gleichgewichtsgleichungen identisch erfüllt und daß die Verträglichkeitsbedingung eine Bestimmungsgleichung der Spannungsfunktion darstellt. Bei Ansatz der Verschiebungsfunktion ist eine der beiden Gleichungen für die Verschiebung identisch erfüllt und die zweite Gleichung ist dann die Bestimmungsgleichung für die Verschiebungsfunktion [ 41 ].

Im Nachfolgenden werden wir uns mit dem zweiten Lösungsweg, der Ableitung über die Spannungsfunktion, befassen.

Mit der Airy'schen Spannungsfunktion ist es möglich, die Gleichgewichtsbedingungen, Formänderungsbeziehungen sowie die Verträglichkeitsbedingung in der Scheibengleichung zusammenzufassen, wobei nur eine skalare Funktion  $F(x,y)$  als Unbekannte auftritt. Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, die Scheibengleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu integrieren.

Es ist allgemein zwischen statischen (dynamischen) und geometrischen (kinematischen) Randbedingungen zu unterscheiden. Die statischen Randbedingungen sind durch eine normal oder tangential gerichtete Belastung längs des Randes gekennzeichnet.

Geometrische Randbedingungen liegen immer dann vor, wenn die Verformungen eines zunächst frei gedachten Randes entweder ganz oder elastisch behindert sind. Selbstverständlich können die statischen und geometrischen Randbedingungen gleichzeitig auftreten.

Beziehen sich die Randbedingungen nur auf die Randwerte von Spannungen, dann liegt ein reines, im anderen Falle ein gemischtes Randwertproblem vor. Die direkte Bestimmung der Spannungsfunktion ist nur in wenigen Fällen möglich.

Je nach Berandungsform der Scheibe ist es zweckmäßig, in kartesischen oder in ebenen Polarkoordinaten zu rechnen. Bei manchen Scheibenproblemen erweist sich die Anwendung von schiefwinkligen oder krummlinigen Koordinaten wie Bipolar-koordinaten als besonders vorteilhaft [19].

Im Jahre 1968 ist durch die Veröffentlichung von F. Andermann [18] gezeigt worden, daß sich die statischen Randbedingungen einer Scheibe mit Hilfe der Biegemomente und Normalkräfte eines gedachten Stabes, dessen Achse mit dem Scheibenumriß zusammenfällt, ausdrücken lassen. Der positive Randwert der Spannungsfunktion  $F$  entspricht einem Biegemoment des gedachten Stabes mit einer positiven Zone im Scheibeninnern. Die positive Ableitung der Spannungsfunktion in Richtung der Normalen entspricht einer Zugkraft des gedachten Stabes. Die geometrischen Randbedingungen für die einzelnen Randpunkte lassen sich mit Hilfe der virtuellen Lasten in statische Randbedingungen überführen.

In der Veröffentlichung [18] befaßt sich F. Andermann mit der Lösung der rechteckigen Scheiben durch Differenzenverfahren unter Ausnutzung der oben genannten Analogie. Durch die Zerlegung der Belastung in symmetrische und antimetrische Anteile wird für die Bestimmung der Spannungsfunktion nur ein Scheibenviertel erforderlich. Dadurch kann das Gleichungssystem, welches aus der Bipotentialgleichung in Differenzenform entwickelt wurde, wesentlich verkleinert werden.

In der vorliegenden Arbeit werden die Spannungsfunktionen für Scheiben unter Berücksichtigung der Vereinfachung der Randbedingungen nach F. Andermann [18] mit Hilfe des Rechenverfahrens "dynamische Relaxation" ermittelt.

Allgemein ist es erforderlich, im Bereich der einspringenden Ecken das Rechenraster zu verfeinern. Durch eine besondere Untersuchung der einspringenden Ecken in der vorliegenden Arbeit gelingt es, diese Rasterverfeinerung zu vermeiden. Das vorhandene Rechenraster wird hinsichtlich seiner Maschenweite auch in einspringenden Ecken ebenso wie im Scheibeninnern beibehalten.

Durch die verwendete Methode erhält man die Spannungsfunktion  $F$  in den Rasterschnittpunkten. Die ermittelte Spannungsfunktion  $F$  ermöglicht die Bestimmung der Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und der Schubspannungen  $\tau_{xy}$  sowie der Hauptspannungen in den Rasterschnittpunkten.

Durch spannungsoptische Untersuchungen wie auch durch die Arbeit von Hansson [22] wurde gezeigt, daß in unmittelbarer Nähe des Eckpunktes eine Schubspannung zuzuordnen ist.

In der vorliegenden Arbeit geschieht dies durch die zutreffende Erfassung der Randbedingungen in der einspringenden Ecke automatisch. Die Schubspannung steigt bis unmittelbar in der Ecke steil an und fällt dann sehr steil ab.

## 2. Übersicht über die Lösungsmethoden des Scheibenproblems

### 2.1 Analytische Lösungen

Da die unmittelbare Bestimmung der Spannungsfunktion nur in wenigen Fällen möglich ist, kann man mit Hilfe passend ausgewählter partikulärer Integrale der Scheibengleichung, die bereits möglichst vielen der Randbedingungen genügen, zunächst einen allgemeinen Ansatz mit einer hinreichenden Anzahl der Freiwerte so wählen, daß auch den restlichen Randbedingungen entsprochen werden kann.

Es gibt eine Vielzahl brauchbarer partikulärer Integrale, z.B. trigonometrische, hyperbolische und Exponential-Funktionen. Diese können mit beliebigen Konstanten oder Variablen vervielfacht und dann überlagert werden.

Dadurch läßt sich bereits erkennen, daß die Rechnung dann verhältnismäßig einfach durchzuführen ist, wenn auch die Belastung mit Hilfe harmonischer Funktionen ausgedrückt werden kann.

Da die Fourier-Reihe eine Überlagerung unendlich vieler harmonischer Schwingungen darstellt, ist es bei endlicher Gliederzahl immer möglich, einen gegebenen Linienzug zu erhalten. Dieser paßt sich der vorgegebenen Belastung umso besser an, je größer die Zahl der Reihenglieder wird.

Wird die Scheibenbelastung durch Fourier-Reihen dargestellt, dann ist im Hinblick auf die zu erfüllenden Randbedingungen auch die Airy'sche Spannungsfunktion in gleichartigen Ansätzen zu entwickeln. Die Spannungs- und Verzerrungskomponenten ergeben sich dann ebenfalls in Form von trigonometrischen Reihen. Sind diese nicht geschlossen summierbar, müssen die Summanden einzeln ausgerechnet werden. Dann ist es ausreichend, eine beschränkte Anzahl von Gliedern zu berücksichtigen.

Damit erhält man auch im Falle einer analytischen Lösung immer nur Näherungsergebnisse, da nicht die wirkliche, sondern eine genäherte Belastung in Rechnung gestellt wurde.

Den Fourier-Reihen bei periodischen Belastungen stehen bei nicht periodischen Belastungen die Fourier-Integrale gegenüber. Sie werden aus den Fourier-Reihen durch den Grenzübergang zur unendlich langen Periode erhalten. Ihre Anwendung ist auf Einzellast- oder Streckenlastangriffe an den Rändern beschränkt, die sich deshalb nicht periodisch wiederholen dürfen, da der Rand außerhalb der betrachteten Strecke lastfrei bleiben muß.

Es gibt ein weiteres Verfahren zur Auffindung strenger Lösungen ebener Probleme, das aufgrund bestimmter Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften komplexer analytischer Funktionen und den Eigenschaften ebener Spannungszustände entwickelt wurde [ 2 ] , [ 12 ] .

Jede biharmonische Funktion  $F(x,y)$  läßt sich mit Hilfe zweier analytischer Funktionen komplexer Veränderlicher darstellen. Nach konformer Abbildung des Gebietes  $F$  auf den Einheitskreis ergibt sich für eine von ihnen aus Randbedingungen eine Integralgleichung mit stetigem Kern, deren Lösung die gesuchte Lösung des Randwertproblems [ 2 ] darstellt.

Die komplexe Darstellung der biharmonischen Funktion  $F(x,y)$  ermöglicht für ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet, welches am Rande durch die Belastung beansprucht ist, eine schnelle Beurteilung des Spannungszustandes, der nur von den äußeren Spannungen, von der Form des Gebietes und nicht vom Material abhängig ist.

Die Verzerrungen und Verschiebungen sind selbstverständlich materialabhängig, da die Lamé'schen Konstanten in die Formel zur Berechnung der Verschiebungen aus komplexen Funktionen eingehen [ 2 ] .

Eine allgemeine Lösung des reinen und gemischten Randwertproblems für einfache Gebiete, die durch eine geschlossene Kurve begrenzt sind, kann man durch die konforme Abbildung der rationalen Funktionen auf einen Kreis und mit Hilfe der Cauchy'schen Integrale gewinnen [ 2 ] .

Man kann auch bei Reihenansätzen die Ansätze von Doppelreihen verwenden. Hier ist zu erwähnen, daß die Summation über zwei Indizes erfolgen muß. Man spricht dann von einer sukzessiven Summierung der Doppelreihe. Die einzelnen Glieder können einfache Potenzen oder harmonische Funktionen sein.

Ein bekannter Doppelreihenansatz ist die Potenzreihe nach Weierstraß. Ein Instrument für die Untersuchung singulärer Stellen ist die Laurent'sche Reihe, die eine Verallgemeinerung der Potenzreihe darstellt. Sie enthält auch negative Potenzen. Die Laurent'sche Reihe konvergiert in jedem abgeschlossenen, konzentrischen Kreis gleichmäßig und absolut, und ihre Summe ist daher im Kreis eine reguläre Funktion. Das bedeutet, daß sich jede in einem Kreis reguläre Funktion in eine Laurent'sche Reihe entwickeln läßt.

## 2.2 Näherungslösungen

Oftmals ist es wegen mathematischer Schwierigkeiten nicht möglich, ein Scheibenproblem streng analytisch zu lösen. Dann ist man gezwungen, Näherungslösungen zu verwenden.

Die Gewinnung von Näherungslösungen ist vor allem auf den zwei folgenden, grundsätzlich verschiedenen Wegen möglich:

Aus partikulären Integralen bildet man einen Reihenansatz, welcher schon möglichst weitgehend den Randbedingungen des Problems genügt. Die Koeffizienten sind dann so zu bestimmen, daß auch den restlichen Randbedingungen, denen der Ansatz nicht genügt, möglichst gut entsprochen wird. Das kann durch das Minimum der Fehlerquadratsumme der Spannungen am Rande des betrachteten Gebietes geschehen. Somit gewinnt man ein lineares, nicht homogenes Gleichungssystem und dementsprechend eine eindeutige und gute Näherungslösung des Randwertproblems.

Die zweite Möglichkeit zur Gewinnung von Näherungslösungen geht davon aus, daß man die Spannungsfunktion, welche der Scheibengleichung nicht voll genügt, als Summe zweier Funktionen ausdrückt, wobei die erste Funktion im allgemeinen den Randwerten genügt, während die zweite Funktion für alle Randwerte Null ergibt [19] .

Dabei existieren mehrere Möglichkeiten für die Bestimmung der Beiwerte der einzelnen Funktionen, welche als allgemeine Reihen dargestellt werden können. Da die Scheibengleichung nicht erfüllt ist, stellt  $\Delta\Delta F$  den Fehler selbst dar. Dadurch kann man die Beiwerte durch das Minimum der Fehlerquadratsumme über den ganzen Scheibenbereich errechnen. Entsprechend ist auch mit Hilfe des Satzes vom Minimum der Ergänzungsarbeit, das heißt mit Hilfe einzelner Ableitungen der Ergänzungsarbeit nach den Beiwerten ein lineares Gleichungssystem der gesuchten Beiwerte zu ermitteln.

Die Beiwerte können weiterhin auch mit Hilfe des Galerischen Verfahrens bestimmt werden, wobei für die erste und zweite Funktion vorausgesetzt wird, daß die Funktionen nicht nur den Randbedingungen, sondern auch der Scheibengleichung genügen. Dadurch sind die Absolutbeträge der beiden Funktionen gleich und mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes für die zweite Funktion erhält man die entsprechenden Beiwerte [ 19 ] .

Das Prinzip von Saint-Venant besagt, daß in hinreichender Entfernung vom Angriffspunkt eines Kraftsystems dessen Wirkung nicht mehr von seiner örtlichen Verteilung, sondern nur von seiner elementar verteilten Resultierenden abhängt. Daraus folgt unmittelbar, daß sich Spannungs- und Formänderungszustand in bestimmten Teilen eines Körpers praktisch nicht ändern, wenn man die örtlich angreifende Belastung durch eine statisch gleichwertige ersetzt. Dadurch ist es oft möglich, die einfachen Scheibenprobleme durch eine Lastumordnung zu lösen.

Jeder ebene Spannungszustand in einer Scheibe kann aus dem adäquaten einachsigen Spannungszustand der technischen Biegelehre (Navier) und aus zweiachsigen Zusatzspannungszuständen infolge der Gleichgewichtssysteme aus den äußeren Lasten und ihren elementar verteilten Resultierenden zusammengesetzt werden [ 43 ] . Es ist möglich, für alle in Frage kommenden Eigenbelastungen die zugehörigen Zusatzspannungszustände einmal zu ermitteln, um sie dann jedem beliebigen Navier'schen Biegespannungszustand zu überlagern. Der Vorteil gegenüber den klassischen Lösungsverfahren wäre damit beträchtlich, jedoch ist die Ermittlung der ebenen Zusatzspannungszustände für die Vielzahl der Möglichkeiten an Eigenbelastungen sehr mühsam. Es lohnt sich oft, die Bestimmung der Zusatzspannungszustände für eine normal und tangential zum Rand gerichtete Einheitslast durchzuführen.

Die Randwertprobleme können näherungsweise auch durch punktweise Erfüllung der Randbedingungen gelöst werden, und zwar durch die Erfüllung einiger Bedingungen in ausgewählten Randpunkten. Ähnlich wie sonst sind auch hier die Ansätze für die Spannungsfunktion zugrundezulegen, welche der Scheibengleichung streng genügen und den Randbedingungen schon möglichst vollständig entsprechen. Diese Ansätze müssen die notwendige Anzahl der Freiwerte zur punktweisen Erfüllung der restlichen Randbedingungen enthalten. Dadurch erhält man ein System von linearen, nicht homogenen Gleichungen, aus welchem die Beiwerte des Ansatzes zu berechnen sind.

Unter den numerischen Rechenverfahren als Näherungslösungen haben sich das Differenzenverfahren und die Methode der finiten Elemente als besonders brauchbar erwiesen.

Das Differenzenverfahren stellt ein Näherungsverfahren für die Lösung von Differentialgleichungen dar, bei dem von der gesuchten Lösung nur die Ordinaten in einer endlichen Anzahl von Punkten des betrachteten Gebietes bestimmt werden. Dem Differenzenverfahren liegt die Scheibengleichung mit Airy-scher Spannungsfunktion in Differenzenform zugrunde. Für die Bestimmung des Verlaufs der Spannungsfunktion ist das Problemgebiet in ein Potentialraster aufzuteilen und bei den bekannten Randbedingungen die Verteilung der Spannungsfunktion so vorzunehmen, daß in jedem Punkt des Netzes die Scheibengleichung in Differenzenform erfüllt wird. Das läßt sich durch ein lineares algebraisches Gleichungssystem oder durch die Anwendung eines Relaxationsverfahrens erreichen.

Beim Differenzenverfahren versucht man neuerdings, durch eine Verbesserung des Verfahrens bei einem großmaschigen Raster genauere Ergebnisse zu erhalten, wobei an erster Stelle das Mehrstellenverfahren zu erwähnen wäre.

Die heute am häufigsten benutzte Methode zur Berechnung kontinuumsmechanischer Probleme ist die sogenannte Methode der finiten Elemente (FEM). Auch diese Methode führt zu einem umfangreichen linearen Gleichungssystem. Als Vorteil des Elementenverfahrens gegenüber dem Differenzenverfahren ist die große Flexibilität des Verfahrens bei der Anpassung an die geometrischen Verhältnisse anzusehen [ 40 ] .

Oftmals lohnt es sich, rechteckige finite Elemente zu wählen. Dadurch verkleinert sich erheblich der Aufwand bei der späteren Auswertung.

Die Brauchbarkeit und die Genauigkeit der mit der FEM erhaltenen Lösungen hängt entscheidend von der Wahl der Ansatzfunktion ab. Es zeigt sich, daß es bei den FEM im allgemeinen nicht gelingt, durch irgendeine Ansatzfunktion die dynamischen und geometrischen Bedingungen überall zu erfüllen. Man erreicht, daß an den Elementenknoten für die Knotenkräfte wie für die Knotenverschiebungen die geometrischen und dynamischen Verträglichkeiten erfüllt werden, aber an den Elementenrändern werden diese nur zum Teil oder näherungsweise erfüllt [ 42 ] .

Eine ähnliche Methode wie FEM ist das Rostverfahren. Hier wird das Kontinuum in endliche Elemente unterteilt und diese durch berechenbare, für die bestimmten Verformungszustände mechanisch äquivalente Elemente ersetzt. Die dynamischen und geometrischen Verträglichkeitsbedingungen werden nur noch an gewissen diskreten Stellen - den Knoten - erfüllt und nicht mehr im gesamten Kontinuum [ 40 ] .

Um nur Normalkräfte zu übertragen, sind alle Gitterroststäbe gelenkig miteinander verbunden. Das Gitterrostelement ist im allgemeinen so dimensioniert, daß für bestimmte Verzerrungszustände mechanische Äquivalenz zwischen dem Kontinuumselement und dem Gitterrostelement besteht [ 40 ] .

Neben der finiten Elementenmethode hat sich in den letzten Jahren das Differenzenverfahren mit Hilfe der "dynamischen Relaxation" für ebene wie auch für räumliche Probleme bewährt.

Bekannt geworden ist diese Methode durch die Veröffentlichungen von Otter [ 34 ] , Schnellenbach [ 15 ] , Peters [ 29 ] , Hansson [ 22 ] , Schultz [ 25 ] und Hartmann [ 26 ] . Hansson formulierte in [ 22 ] allgemeine Randbedingungen in einem kartesischen Koordinatensystem für Scheiben mit beliebigen, nicht koordinatenparallelen Rändern. Die Methode der "dynamischen Relaxation" ist ein Iterationsverfahren, welchem die Bewegungsgleichungen der Kontinuumsmechanik mit erweiterten Gliedern von Beschleunigungs- und Dämpfungskräften zugrunde liegen. Die numerische Lösung erfolgt mit Hilfe der Differenzenrechnung.

Für die Berechnung ist entscheidend die Wahl des Rechenzeitschrittes sowie des Dämpfungskoeffizienten.

Es hat sich herausgestellt, daß der Dämpfungskoeffizient nur auf die Rechenzeit und der Rechenzeitschritt hauptsächlich auf die Konvergenz bzw. Divergenz der Rechnung einen Einfluß hat. Das ist besonders im Hinblick auf die Wirtschaftlichkeit der Berechnung wichtig.

Hier soll nur noch erwähnt werden, daß die angeschnittenen Probleme auch durch Modellversuche, wie Spannungsoptik oder Potentialanalogie gelöst werden können. Der Arbeitsaufwand für die endgültige Auswertung steigt jedoch bei diesen Verfahren sehr stark an.

### 2.3 Grundgleichungen des ebenen Spannungszustandes

Ein ebenes Flächentragwerk, das nur durch die Kräfte in seiner Ebene beansprucht wird und dessen Mittelfläche bei den Formänderungen eben bleibt, wird Scheibe genannt [19] .

Die Gleichungen der ebenen Elastizitätstheorie lassen sich unmittelbar auf zwei Gleichgewichtszustände elastischer Körper anwenden, und zwar sind dies der "ebene Verzerrungszustand" und der "ebene Spannungszustand".

Im Nachfolgenden werden die bekannten Grundgleichungen des ebenen Spannungszustandes unter Vernachlässigung der Volumenkräfte zusammengestellt [44] .

Wir nehmen an, daß im Mittel ein ebener Spannungszustand herrscht, wenn die Mittelwerte der Spannungen

$$\bar{\sigma}_{zx} = \bar{\sigma}_{zy} = \bar{\sigma}_{zz} = 0 \quad (2-1)$$

sind [41] .

Die Gleichgewichtsgleichungen ohne Einfluß der Massenkkräfte unter Berücksichtigung der Trägheits- und Dämpfungskräfte (da die Berechnung nach der "dynamischen Relaxation" durchgeführt wird) lauten:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \cdot A = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \cdot D \cdot \frac{\partial u}{\partial t} , \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \cdot B = \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho \cdot D \cdot \frac{\partial v}{\partial t} , \quad (2-3)$$

wobei  $\rho$  die Werkstoffdichte,  
D die Dämpfung  
bedeuten.

Die Grundgleichungen für das Formänderungsgesetz lauten:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) , \quad (2-4)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) , \quad (2-5)$$

$$\epsilon_{xy} \equiv \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy} . \quad (2-6)$$

Die Gleichungen (2-4) bis (2-6) liefern folgende Spannungs-Dehnungsgleichungen:

$$\sigma_x = 2\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) , \quad (2-7)$$

$$\sigma_y = 2\mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) , \quad (2-8)$$

$$\tau_{xy} = \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) , \quad (2-9)$$

wobei bei ebenem Verzerrungszustand  $\mu$  und  $\lambda$  die Lamé-schen Konstanten sind.

Im Falle des ebenen Spannungszustandes sind die Verschiebungs- und Spannungskomponenten durch ihre Mittelwerte über die Scheibendicke, und die Lamé-sche Konstante  $\lambda$  durch eine neue definierte Größe  $\lambda^x$  zu ersetzen [ 2 ] , wobei:

$$\lambda^x = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-\nu)} = \frac{\nu \cdot E}{(1-\nu^2)} , \quad (2-10)$$

und

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2-11)$$

sind.

Die Verträglichkeitsbedingung für die Verzerrungen lautet:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2-12)$$

Im Jahre 1862 hat der englische Astronom und Physiker G. B. Airy in der Elastizitätstheorie die sogenannte Airy'sche Spannungsfunktion eingeführt.

Unter einer Spannungsfunktion versteht man eine skalare Ortsfunktion, aus der man durch Differentiationsprozesse die Spannungen gewinnen kann [ 1 ] .

Beim Verschwinden der Volumenkräfte können mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion  $F(x,y)$  bekannterweise die Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  wie folgt ausgedrückt werden:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (2-13)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (2-14)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2-15)$$

Durch diese Ansätze sind die Gleichgewichtsbedingungen bei statischen Fällen und unter Vernachlässigung der Massenkräfte identisch erfüllt.

Gehen wir mit diesen Ansätzen (2-13) bis (2-15) in die Verträglichkeitsbedingung (2-12), so erhalten wir für die Airy'sche Spannungsfunktion  $F(x,y)$  folgende Bedingung [41] :

$$\Delta\Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad . \quad (2-16)$$

Diese Bedingungsgleichung kann auch über den Variationsweg abgeleitet werden, und zwar durch das Prinzip vom Minimum der gesamten Ergänzungsenergie [27].

### 3. Randbedingungen der Scheibe

Im Jahre 1968 hat Andermann [18] gezeigt, daß sich die statischen (dynamischen) Randbedingungen einer Scheibe mit Hilfe der Biegemomente und Normalkräfte eines gedachten Stabes, dessen Achse mit dem Scheibenumriß zusammenfällt, ausdrücken lassen.

Die geometrischen (kinematischen) Randbedingungen liegen dann vor, wenn längs der Berandung der Scheibe die Verschiebungen einzelner Randpunkte vorgeschrieben sind. Diese Randbedingungen kann man auf die statischen Randbedingungen folgenderweise überführen:

Analog wie bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme der Stabstatik kann man die endgültige Lösung durch die Lösung für statisch bestimmte Hauptsysteme und die mit den bestimmten Faktoren multiplizierte Lösung der Einheitsspannungszustände zusammensetzen. Diese Faktoren sind so zu bestimmen, daß die kinematischen Randbedingungen erfüllt sind.

Ein Beispiel für die Erfüllung der kinematischen Randbedingungen stellt die durchlaufende Scheibe gemäß Bild 7.2 dar.

Im Weiteren werde ich mich deswegen nur mit statischen Randbedingungen befassen und, zurück auf Andermann [18], werden diese im Folgenden nochmals neu abgeleitet.

### 3.1 Randkräfte der Scheibe

Ein Randabschnitt der Scheibe (Bild 3.1) mit der Länge  $ds$  soll durch die Randkräfte belastet werden. Die Resultierende dieser Kräfte kann man auf die Längeneinheit und auf die Dickeneinheit beziehen und in Komponentenschreibweise ausdrücken:

$$p_x = \frac{dP_x}{d \cdot ds} \quad (3-1)$$

$$p_y = \frac{dP_y}{d \cdot ds} \quad (3-2)$$

wobei  $d$  Scheibendicke,  
 $ds$  Länge des Randelementes  
 und  $dP_x, dP_y$  Kraftkomponenten  
 sind.

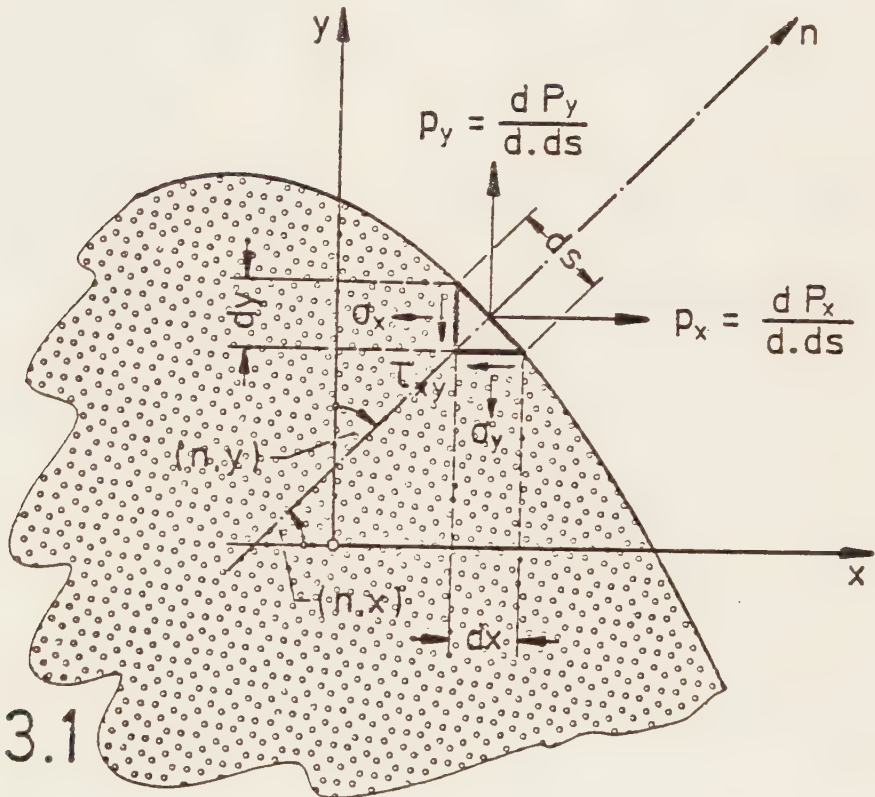


Bild 3.1

Im Bild 3.1 sind

die Normale auf die Randelemente  $ds$  mit  $n$ ,

die Neigungswinkel zwischen Abszisse  $x$

und Normale  $n$

mit  $(n, x)$

und der Neigungswinkel zwischen Ordinate  $y$

und Normale  $n$

mit  $(n, y)$

bezeichnet.

Durch die Gleichgewichtsbedingung des Randelementes ergeben sich folgende Gleichungen:

$$p_x = \sigma_x \cdot \cos(n, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(n, y) , \quad (3-3)$$

$$p_y = \tau_{xy} \cdot \cos(n, x) + \sigma_y \cdot \cos(n, y) - \quad (3-4)$$

Unter Beachtung der Spannungsfunktion  $F(x, y)$  folgt:

$$p_x = \frac{\partial F^2}{\partial y^2} \cdot \cos(n, x) - \frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} \cdot \cos(n, y) , \quad (3-5)$$

$$p_y = -\frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} \cdot \cos(n, y) . \quad (3-6)$$

Die Spannungsfunktion  $F(x, y)$  einer speziellen Scheibe und bei vorgegebener Belastung muß die Differentialgleichung  $\Delta \Delta F = 0$  und die Randbedingungen am Scheibenrand erfüllen.

### 3.2 Scheibenumriß als Stab

Wir stellen uns einen gedachten Stab vor, dessen Achse mit dem Umriß der Scheibe zusammenfällt und in gleicher Weise wie der Scheibenrand (Bild 3.2) belastet ist.

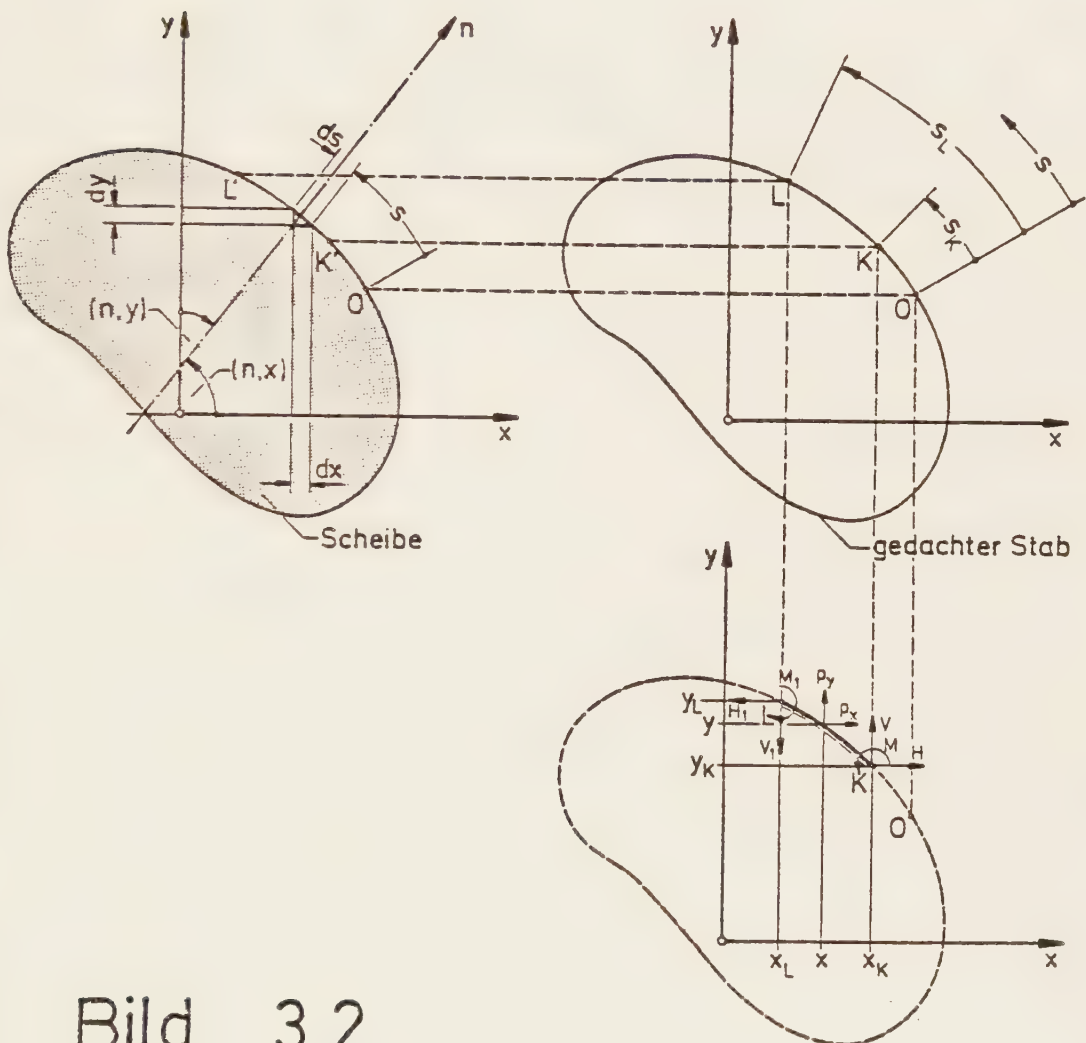


Bild 3.2

Ausgangspunkt für den gedachten Stab auf dem Umriß soll Punkt O sein. Die Lage der einzelnen Querschnitte des gedachten Stabes wird in der Stabachse gemessen und mit  $s$  bezeichnet. Dabei ist die positive Richtung dem Uhrzeigersinn entgegengerichtet.

Man schneidet den gedachten Stab in einem beliebigen Punkt K und bezeichnet die auftretenden inneren Kräfte mit  $H$ ,  $V$  und  $M$ .

Für einen beliebigen Punkt L sollen die inneren Kräfte mit  $H_1$ ,  $V_1$  und  $M_1$  bezeichnet werden.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt für den Punkt L:

$$V_1 = V + \int_K^L p_y \cdot ds \quad , \quad (3-7)$$

$$H_1 = H + \int_K^L p_x \cdot ds \quad , \quad (3-8)$$

und

$$M_1 = M + H \cdot (Y_L - Y_K) + V \cdot (X_K - X_L) + \\ + \int_K^L p_x \cdot (Y_L - Y) \cdot ds + \int_K^L p_y \cdot (X - X_L) \cdot ds \quad . \quad (3-9)$$

### 3.3 Scheibenumriß als Scheibenrand

Zunächst betrachten wir ein Scheibenelement am Rande (siehe Bild 3.3) mit den Seitenlängen  $dx$ ,  $dy$  und  $ds$ .

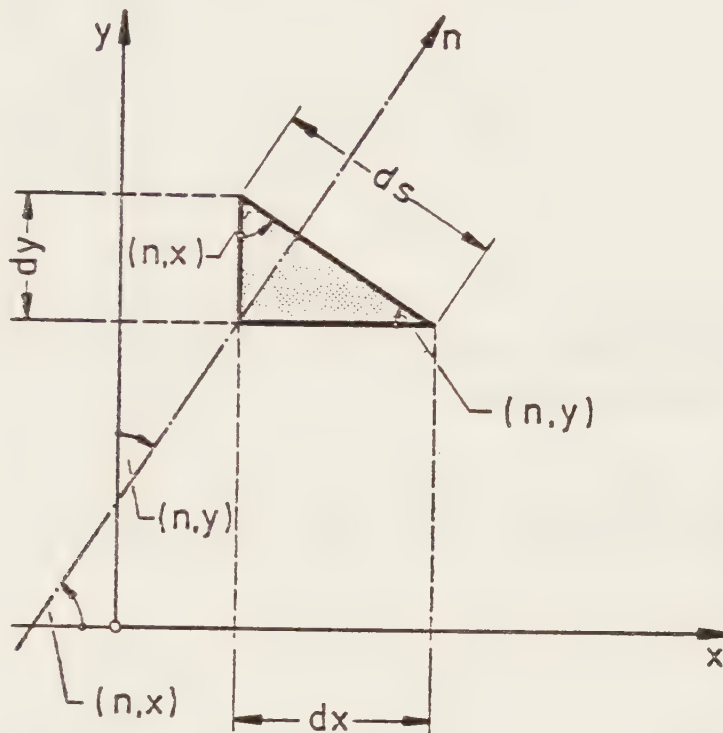


Bild 3.3

Es gilt:

$$\cos (n, x) = \frac{dy}{ds} , \quad (3-10)$$

$$\cos (n, y) = - \frac{dx}{ds} . \quad (3-11)$$

Die Ableitung  $\frac{dx}{ds}$  ist mit dem Minusvorzeichen versehen, da sich bei einem positiven Zuwachs der  $s$ -Koordinate ein negativer Zuwachs der  $x$ -Koordinate ergibt.

Unter Berücksichtigung der vorher genannten Gleichungen kann man die Gleichgewichtsbedingung des Randelementes folgenderweise beschreiben:

$$p_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) , \quad (3-12)$$

$$p_y = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) . \quad (3-13)$$

Den Stabpunkten K und L entsprechen bei der Scheibe die Punkte K' und L' (Bild 3.2). Im Punkt K' sollen folgende Beziehungen gelten:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{K'} = -V' , \quad (3-14)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{K'} = H' . \quad (3-15)$$

Die partielle Ableitung der Spannungsfunktion F im Punkt L' erhält man durch Integration der Gleichungen (3-13) und (3-12). Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3-14) und (3-15) folgt:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{L'} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{K'} - \int_{K'}^{L'} p_y \cdot ds = -V' - \int_{K'}^{L'} p_y \cdot ds , \quad (3-16)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{L'} = \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{K'} + \int_{K'}^{L'} p_x \cdot ds = H' + \int_{K'}^{L'} p_x \cdot ds . \quad (3-17)$$

Durch den Vergleich der Gleichungen (3-16) und (3-17) mit (3-7) und (3-8) ist zu ersehen, daß bei Annahme

$$\left. \begin{aligned} H &= H' , \\ V &= V' , \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

die Absolutwerte der Ableitungen  $\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)$  und  $\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)$  den inneren Kräften V' und H' entsprechen.

Die Ableitungen der Spannungsfunktion  $F(x,y)$  in Richtung der Tangente und Normale lauten:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} , \quad (3-19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} . \quad (3-20)$$

Durch die Integration der Gleichung (3-19) erhält man den Wert der Funktion  $F$  im Punkt  $L'$ , welche lautet:

$$F = M' + \int_{K'}^{L'} \left( \frac{\partial F}{\partial s} \right) \cdot ds = M' + \int_{K'}^{L'} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) \cdot ds , \quad (3-21)$$

wobei der Funktionswert  $F(x,y)$  im Punkt  $K'$  mit  $M'$  bezeichnet wurde.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3-16), (3-17) und (3-21) ergibt sich:

$$F = M' + \int_{K'}^{L'} \left\{ \left[ -V' - \int_{K'}^s p_y \cdot ds \right] \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \left[ H' + \int_{K'}^s p_x \cdot ds \right] \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right\} \cdot ds , \quad (3-22)$$

bzw.:

$$F = M' - V' \cdot \int_{K'}^{L'} dx + H' \cdot \int_{K'}^{L'} dy - \int_{K'}^{L'} \left[ \left( \int_{K'}^s p_y \cdot ds \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right] \cdot ds + \int_{K'}^{L'} \left[ \left( \int_{K'}^s p_x \cdot ds \right) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right] \cdot ds . \quad (3-23)$$

Um die Gleichung (3-23) zu vereinfachen, werden zuerst die einzelnen Summanden der Gleichung (3-23) errechnet.

Für die ersten zwei Summanden der Gleichung (3-23) ergibt sich:

$$-V' \cdot \int_{K'}^{L'} dx = -V' \cdot X \Big|_{K'}^{L'} = V' \cdot (X_{K'} - X_{L'}) \quad (3-24)$$

und

$$+H' \cdot \int_{K'}^{L'} dy = H' \cdot Y \Big|_{K'}^{L'} = H' \cdot (Y_{L'} - Y_{K'}) \quad (3-25)$$

Um die nächsten zwei Summanden der Gleichung (3-23) zu vereinfachen, wird die partielle Integration genauer untersucht, welche lautet:

$$\int_a^b \frac{df(s)}{ds} \cdot g(s) \cdot ds = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(s) \cdot \frac{dg(s)}{ds} \cdot ds \quad (3-26)$$

Zuerst wird der nachfolgende Summand  $s_1$  der Gleichung (3-23) betrachtet, wobei schon eine Identität in Bezug auf die Funktionen der linken Seite der Gleichung (3-26) festgelegt wird:

$$s_1 = - \int_{K'}^{L'} \left[ \underbrace{\left( \int_{K'}^s p_y \cdot ds \right)}_{g(s)} \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)}_{\frac{df(s)}{ds}} \right] \cdot \underbrace{ds}_{ds} \quad (3-27)$$

Um die partielle Integration durchzuführen, ist es erforderlich, für die in der Gleichung (3-27) auftretenden Funktionen noch folgende Ausdrücke  $\frac{dg(s)}{ds}$  und  $f(s)$  zu bestimmen. Unter Beachtung der Gleichung (3-27) folgt:

$$\frac{dg(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \int_{K'}^s p_y \cdot ds \right) = p_y \quad (3-28)$$

und

$$f(s) = \int \frac{df(s)}{ds} \cdot ds = \int \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \cdot ds = x \quad (3-29)$$

Dann ergibt sich:

$$s_1 = - \left\{ x_{L'} \cdot \int_{K'}^{L'} p_y \cdot ds - x_{K'} \cdot \int_{K'}^{K'} p_y \cdot ds - \int_{K'}^{L'} x \cdot p_y \cdot ds \right\} \quad (3-30)$$

III  
0

bzw.:

$$s_1 = \int_{K'}^{L'} p_y \cdot (x - x_{L'}) \cdot ds \quad (3-31)$$

Entsprechend wie beim Summanden  $s_1$  kann man den Summanden  $s_2$  der Gleichung (3-23) folgendermaßen ausdrücken:

$$s_2 = + \int_{K'}^{L'} \left[ \underbrace{\left( \int_{K'}^s p_x \cdot ds \right)}_{\text{III}} \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial y}{\partial s} \right)}_{\text{III}} \right] \cdot \underbrace{ds}_{\text{III}} \quad (3-32)$$

$g(s) \quad \frac{df(s)}{ds}$

Unter Beachtung der Gleichung (3-32) folgt:

$$\frac{dg(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \int_{K'}^s p_x \cdot ds \right) = p_x \quad (3-33)$$

und

$$f(s) = \int \frac{df(s)}{ds} \cdot ds = \int \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right) \cdot ds = y \quad (3-34)$$

Dann ergibt sich:

$$s_2 = \left\{ y_{L'} \cdot \int_{K'}^{L'} p_x \cdot ds - y_{K'} \cdot \int_{K'}^{K'} p_x \cdot ds - \int_{K'}^{L'} y \cdot p_x \cdot ds \right\} \quad (3-35)$$

■  
0

bzw.:

$$s_2 = \int_{K'}^{L'} p_x \cdot (y_{L'} - y) \cdot ds \quad (3-36)$$

Jetzt kann die Gleichung (3-23) wie folgt geschrieben werden:

$$F = M' + H' \cdot (y_{L'} - y_{K'}) + V' \cdot (x_{K'} - x_{L'}) + \\ + \int_{K'}^{L'} p_x \cdot (y_{L'} - y) \cdot ds + \int_{K'}^{L'} p_y \cdot (x - x_{L'}) \cdot ds \quad (3-37)$$

### 3.4 Zusammenhang

Durch den Vergleich zwischen dem Ausdruck (3-37) für die Spannungsfunktion im Punkt L' und dem Ausdruck (3-9) für das Biegemoment des gedachten Stabes im entsprechenden Punkt L ist ersichtlich, daß die beiden Ausdrücke bis auf eine freie (unwesentliche) Konstante identisch sind. Das bedeutet, daß der Randwert der Funktion F als Biegemoment des gedachten Stabes berechnet werden kann.

Dieses Biegemoment im willkürlich gewählten Schnitt  $K = K'$  wird durch gedachte Schnittkräfte  $M'$ ,  $H'$  und  $V'$  sowie durch die angreifenden Randbelastungen  $p_x$  und  $p_y$  an der Strecke  $K' L'$  hervorgerufen.

Die Ableitung der Funktion F in Richtung der Normalen erhält man durch die Gleichung (3-20) und mit Hilfe der Ausdrücke (3-16) und (3-17):

$$\frac{\partial F}{\partial n} = - \left[ V' + \int_{K'}^{L'} p_y \cdot ds \right] \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial n} \right) + \left[ H' + \int_{K'}^{L'} p_x \cdot ds \right] \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial n} \right) \quad (3-38)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \cos (x, n) \quad , \quad (3-39)$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \cos (y, n) \quad , \quad (3-40)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial n} = & - \left[ V' + \int_{K'}^{L'} p_y \cdot ds \right] \cdot \cos (x, n) + \\ & + \left[ H' + \int_{K'}^{L'} p_x \cdot ds \right] \cdot \cos (y, n) \quad . \end{aligned} \quad (3-41)$$

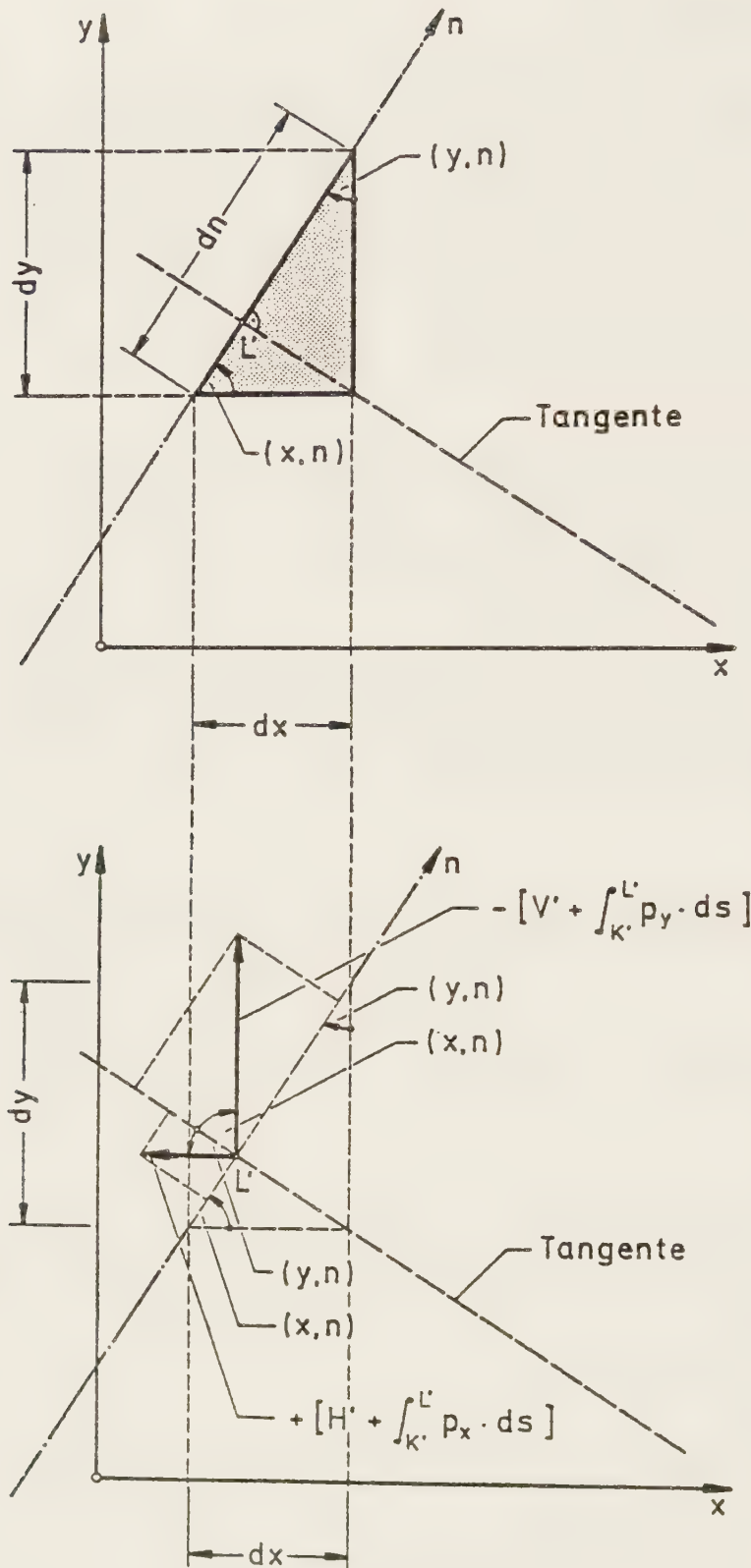


Bild 3.4

Aus der vorherigen Skizze (Bild 3.4) ist leicht zu ersehen, daß die Ableitung der Spannungsfunktion  $F$  in Richtung der Normalen identisch mit der Längskraft im gedachten Stab ist.

Da die gedachten Kräfte  $V'$ ,  $H'$  und  $M'$  in den Gleichungen (3-37) und (3-41) nur im konstanten oder linearen Anteil der Spannungsfunktion  $F$  auftreten können, haben sie auf die endgültigen Spannungen keinen Einfluß. Das bedeutet, daß diese Werte willkürlich angenommen werden können. Für praktische Zwecke ist es oftmals zweckmäßig, Null einzusetzen.

Der positive Randwert der Spannungsfunktion  $F$  entspricht einem Biegemoment des gedachten Stabes mit einer positiven Zone im Scheibeninnern.

Die positive Ableitung der Spannungsfunktion  $F$  in Richtung der Normalen (aus dem Scheibeninnern nach außen) entspricht einer Zugkraft des gedachten Stabes.

#### 4. Das Lösungsverfahren

##### 4.1 Wahl des Lösungsverfahrens

Für viele praktische Probleme der ebenen Elastizitätstheorie ist es häufig wegen unüberwindlicher mathematischer Schwierigkeiten nicht möglich, die partielle Differentialgleichung (2-16) streng zu lösen. In diesen Fällen können numerische Rechenverfahren zur Ermittlung der Spannungsfunktion  $F(x,y)$ , der Spannungen oder Formänderungen herangezogen werden [19] .

Wenn die Randbedingungen bekannt sind, besteht die Lösung der Aufgabe darin, die Verteilung von  $F(x,y)$  innerhalb des Problemgebietes so vorzunehmen, daß in jedem Punkt des Problemgebietes die Differentialgleichung (2-16) erfüllt ist.

Bereits im Abschnitt 2 wurden die Möglichkeiten für die Lösung des Scheibenproblems allgemein angegeben.

In dieser Arbeit soll, wie schon im Abschnitt 1 erwähnt, das Rechenverfahren der "dynamischen Relaxation" verwendet werden. Dieses gewählte Lösungsverfahren hat den großen Vorteil, daß es ganz allgemein formulierbar [22] ist und daß die Formulierung der Berechnungsgleichungen für das Scheibeninnere sowie für die Randbereiche und die einspringenden Ecken sehr einfach ist. Diese Methode hat sich besonders in den letzten Jahren sowohl für ebene als auch für räumliche Probleme bewährt [15] , [22] , [25] , [26] , [29] .

Die numerische Berechnung wird mit Hilfe der "dynamischen Relaxation" unter Beachtung des gedachten Stabes, dessen Achse mit dem Umriß der Scheibe zusammenfällt [18] , durchgeführt.

Die Methode der "dynamischen Relaxation" ist ein Iterationsverfahren, welchem die Bewegungsgleichungen (2-2) bis (2-3) mit erweiterten Gliedern von Beschleunigungs- und Dämpfungskräften zugrundeliegen. Ein iteratives Lösungsverfahren ist bei der elektronischen Berechnung günstig, da gegenüber einem direkten Auflösungsverfahren erheblich weniger Speicherplatz erforderlich ist, denn es müssen nur die Größen für die einzelnen Punkte abgespeichert werden [ 22 ] .

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2-13) bis (2-15) gehen die Gleichungen (2-2) bis (2-3) in folgende Form über:

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial^2 F^x}{\partial y^2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( -\frac{\partial^2 F^x}{\partial x \partial y} \right)}{\partial y} = \rho \cdot A \quad , \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial \left( -\frac{\partial^2 F^x}{\partial x \partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 F^x}{\partial x^2} \right)}{\partial y} = \rho \cdot B \quad , \quad (4-2)$$

wobei  $F = F^x$  eingesetzt wurde.

Da die Ansätze (2-13) bis (2-15) nur bei den statischen Fällen unter Vernachlässigung der Massenkkräfte die Gleichgewichtsbedingungen (2-2) bis (2-3) identisch erfüllen, sind die Funktionswerte für  $F^x$  in den Gleichungen (4-1) bis (4-2) unter Berücksichtigung der Beschleunigungs- und Dämpfungskräfte mit der Airy-schen Spannungsfunktion im Zeitpunkt  $t = 0$  nicht identisch.

Die statische Ruhelage des Systems wird erreicht, wenn durch das Dämpfungsglied die Veränderung der Verschiebung nach der Zeit ihren Grenzwert Null erreicht und dadurch sowohl die Beschleunigungs- als auch die Dämpfungskräfte verschwinden. Das bedeutet, daß mit der wachsenden Zeit die Funktionswerte  $F^x$  zu endgültigen Werten der Airy-schen Spannungsfunktion  $F$  konvergieren.

In den Ausdrücken (2-2) und (2-3) treten in der rechten Seite der Gleichung die Werte der Beschleunigung und der Geschwindigkeit gleichzeitig auf. Dadurch hat die Dämpfung  $D$  eine Dimension  $[s^{-1}]$ . Um die dimensionslose Gleichung zu erhalten, wird in den folgenden Gleichungen die Dämpfung in der Form  $D = K/\Delta t$  geschrieben, wobei

$K$  - Dämpfungskoeffizient und  
 $\Delta t$  - Zeitintervall ist.

Die Gleichungen lauten:

$$A = \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \frac{K}{\Delta t} \cdot \dot{u} , \quad (4-3)$$

$$B = \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} + \frac{K}{\Delta t} \cdot \dot{v} , \quad (4-4)$$

wobei  $\dot{u}$  und  $\dot{v}$  mittlere Geschwindigkeiten in der Zeit  $t$  sind.

Durch die Ableitung der Gleichungen (2-7) bis (2-9) nach der Zeit, da die Lösung mit Hilfe der "dynamischen Relaxation" gewonnen wird, und unter Beachtung der Gleichungen (2-13) bis (2-15) erhält man:

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)}{\partial t} = 2\mu \cdot \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \cdot \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right) , \quad (4-5)$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)}{\partial t} = 2\mu \cdot \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \lambda \cdot \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right) , \quad (4-6)$$

$$\frac{\partial \left( -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)}{\partial t} = \mu \cdot \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) . \quad (4-7)$$

## 4.2 Differenzengleichungen für "dynamische Relaxation"

### 4.2.1 Festlegung des Rechenrasters

Um die Werte  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  und  $F$  zu berechnen, wird das Rechenraster gemäß Bild 4.1 zugrundegelegt.

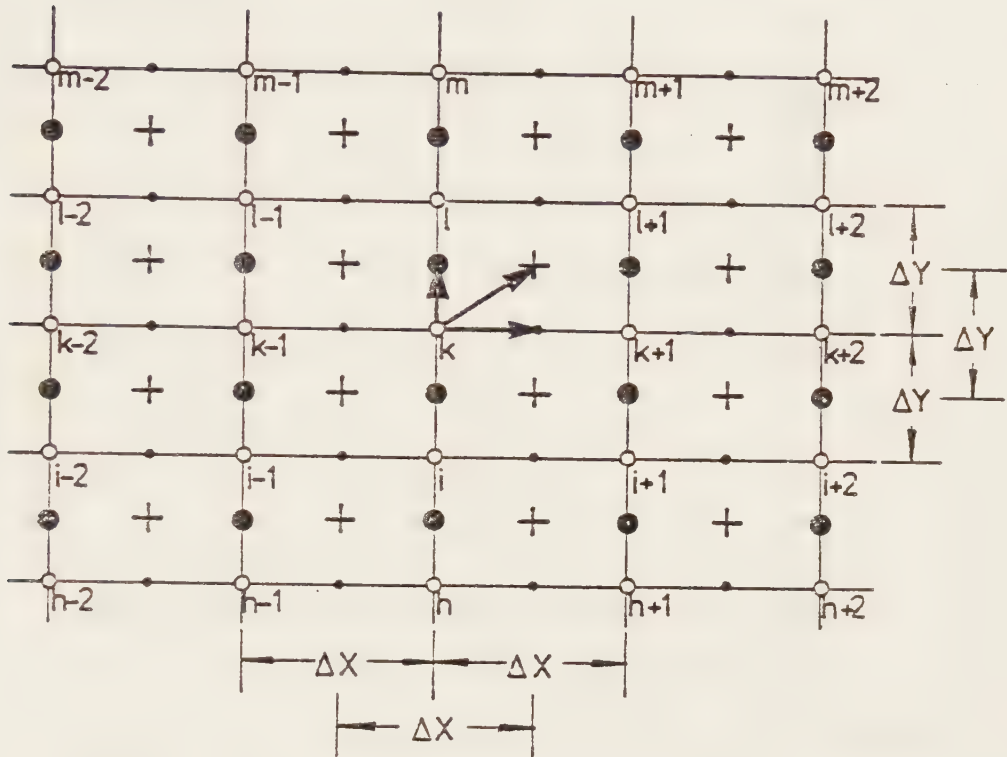


Bild 4.1



Stützstellen der Spannungsfunktion  $F$

und ihrer Ableitungen  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y$ ;  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x$



Stützstellen der  $-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau_{xy}$



Stützstellen der Geschwindigkeiten  $\dot{u}$   
und der Verschiebungen  $u$



Stützstellen der Geschwindigkeiten  $\dot{v}$   
und der Verschiebungen  $v$

Da die einzelnen Werte in verschiedenen Zeiten ausgerechnet werden, ist noch ein zusätzliches Zeitraster gemäß Bild 4.2 notwendig.

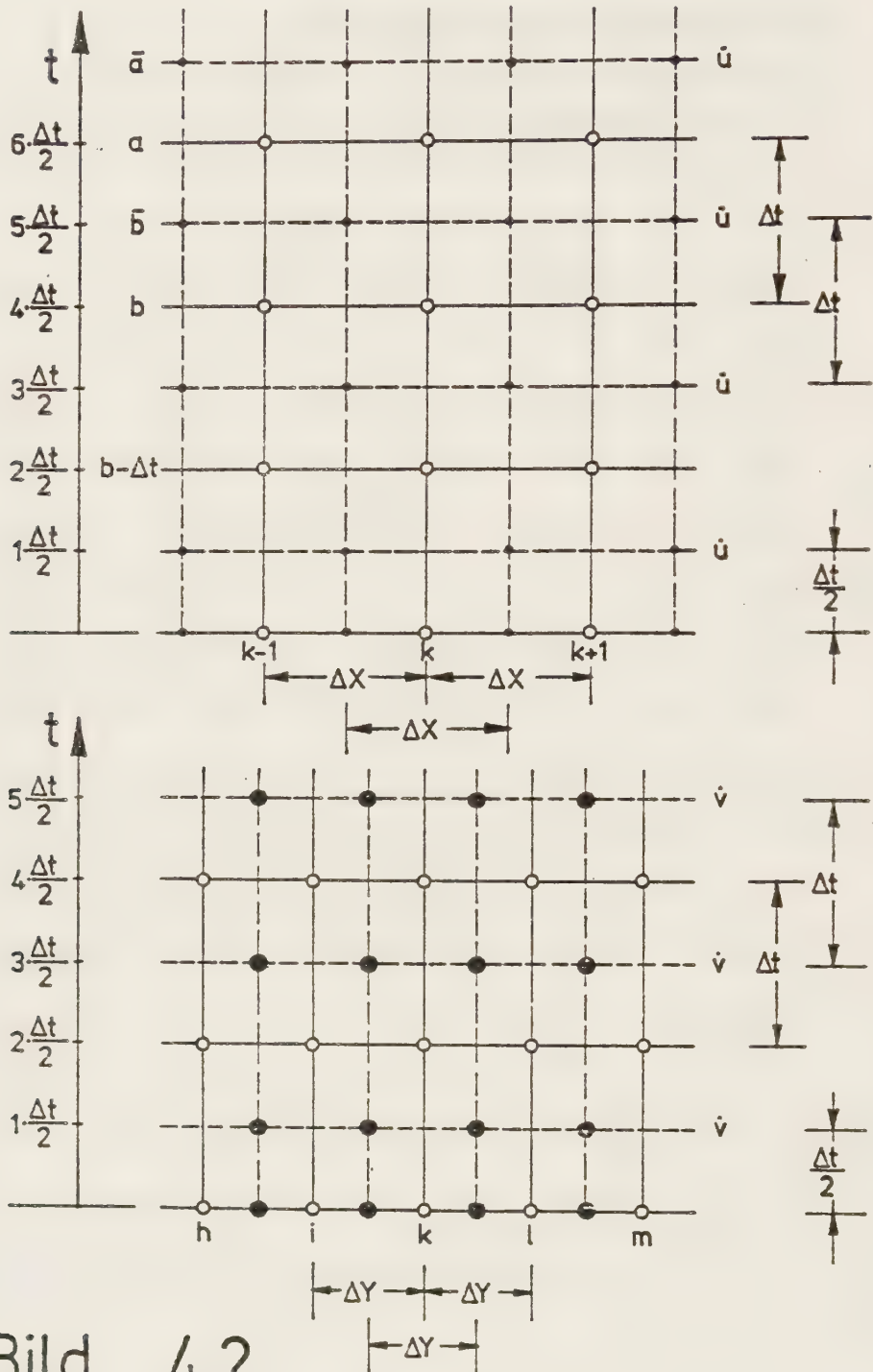


Bild 4.2

#### 4.2.2 Differenzengleichungen für das Scheibeninnere

Da die Lösung des Spannungszustandes mit Hilfe des numerischen Verfahrens gesucht wird, kann man die Grundgleichungen in Form der endlichen Differenzen ausdrücken.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$\Delta t$  = Zeitintervall,

$k$  = betrachteter Punkt,

$a$  =  $t$  betrachteter Zeitpunkt.

Weiterhin soll gelten:

$$\left. \begin{aligned} b &= t - \Delta t, \\ \bar{a} &= a + \frac{\Delta t}{2} = t + \frac{\Delta t}{2}, \\ \bar{b} &= b + \frac{\Delta t}{2} = t - \frac{\Delta t}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

Alle Gleichungen werden für den Punkt  $k$  und für den Zeitpunkt  $t = a$  aufgestellt und alle Größen, welche sich auf das beziehen, tragen Index  $k$  bzw.  $a$ .

Im Bild 4.3 sind die aufgetretenen Größen für einzelne Punkte  $k$  und  $l$  im Zeitraster dargestellt.

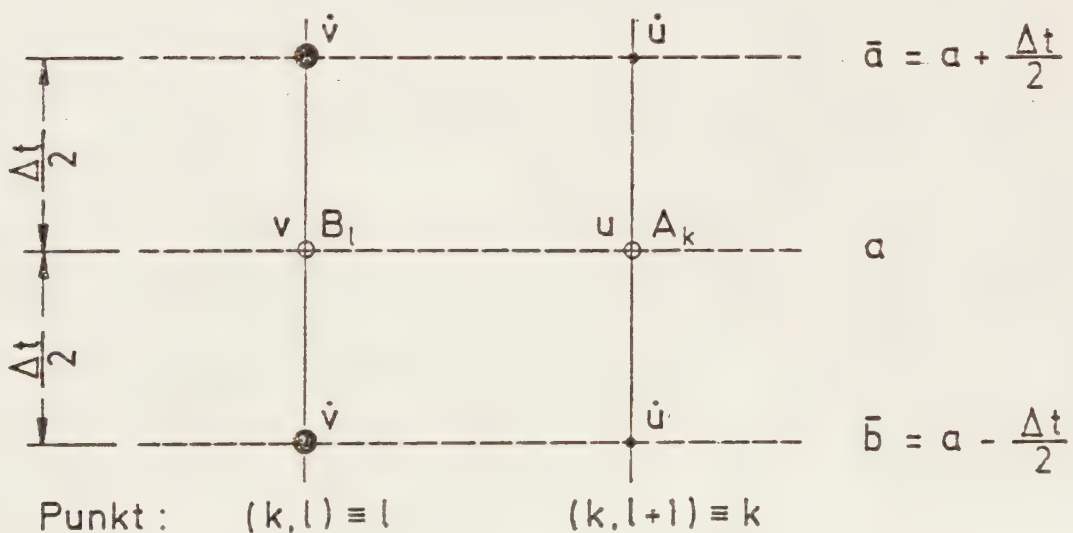


Bild 4.3

Aus Bild 4.3 und durch die Gleichungen (4-3) und (4-4) lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

$$A_{ka} = \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} \right) + D \cdot \dot{u} = \frac{\dot{u}_{\bar{a}k} - \dot{u}_{\bar{b}k}}{\Delta t} + \frac{K}{\Delta t} \cdot \frac{\dot{u}_{\bar{a}k} + \dot{u}_{\bar{b}k}}{2} , \quad (4-9)$$

und

$$B_{ka} = \frac{\dot{v}_{\bar{a}k} - \dot{v}_{\bar{b}k}}{\Delta t} + \frac{K}{\Delta t} \cdot \frac{\dot{v}_{\bar{a}k} + \dot{v}_{\bar{b}k}}{2} . \quad (4-10)$$

Durch Umordnung der Gleichungen (4-9) und (4-10) folgt:

$$\dot{u}_{\bar{a}k} = \dot{u}_{\bar{b}k} \cdot \frac{\left(1 - \frac{K}{2}\right)}{\left(1 + \frac{K}{2}\right)} + \frac{\Delta t}{\left(1 + \frac{K}{2}\right)} \cdot A_{ka} , \quad (4-11)$$

und

$$\dot{v}_{\bar{a}k} = \dot{v}_{\bar{b}k} \cdot \frac{\left(1 - \frac{K}{2}\right)}{\left(1 + \frac{K}{2}\right)} + \frac{\Delta t}{\left(1 + \frac{K}{2}\right)} \cdot B_{ka} . \quad (4-12)$$

wobei die  $A_{ka}$  und  $B_{ka}$  nach folgenden Ausdrücken zu bestimmen sind:

$$A_{ka} = \frac{1}{\rho} \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \textcircled{-1} & \textcircled{1} \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_a \\ \textcircled{k} \end{array} - \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \textcircled{1} \\ \hline & \textcircled{-1} \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a \\ \textcircled{k} \end{array} \right\} . \quad (4-13)$$

und

$$B_{ka} = \frac{1}{\rho} \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \textcircled{1} & \\ \hline \textcircled{-1} & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_a \\ \textcircled{k} \end{array} - \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \textcircled{-1} & \textcircled{1} \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a \\ \textcircled{k} \end{array} \right\} . \quad (4-14)$$

Die entsprechenden weiteren Ableitungen der Spannungsfunktion erhält man folgendermaßen:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{ak} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{bk} + \frac{2\mu \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \textcircled{-1} & \textcircled{1} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{u}_{\bar{b}} + \lambda \cdot \Delta t \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \textcircled{-1} & \textcircled{1} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{u}_{\bar{b}} + \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \textcircled{1} \\ \hline \textcircled{-1} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{v}_{\bar{b}} \right\} \quad (4-15)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{ak} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{bk} + \frac{2\mu \cdot \Delta t}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \textcircled{1} \\ \hline \textcircled{-1} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{v}_{\bar{b}} + \lambda \cdot \Delta t \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \textcircled{-1} & \textcircled{1} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{u}_{\bar{b}} + \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \textcircled{1} \\ \hline \textcircled{-1} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{v}_{\bar{b}} \right\} \quad (4-16)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{ak} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{bk} - \mu \cdot \Delta t \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \textcircled{1} \\ \hline \textcircled{-1} & \\ \hline \end{array} \cdot \dot{v}_{\bar{b}} + \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \textcircled{1} \\ \hline \textcircled{-1} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{u}_{\bar{b}} \right\} \quad (4-17)$$

Die auftretenden Verschiebungen  $u_a$  und  $v_a$  im Punkt  $k$  werden wie folgt ermittelt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_b \approx \dot{u}_b = \frac{u_a - u_b}{2 \cdot \frac{\Delta t}{2}} \quad (4-18)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_b \approx \dot{v}_b = \frac{v_a - v_b}{2 \cdot \frac{\Delta t}{2}} \quad (4-19)$$

Die Verschiebungen betragen im Zeitpunkt  $a$  :

$$u_a = u_b + \Delta t \cdot \dot{u}_b \quad (4-20)$$

$$v_a = v_b + \Delta t \cdot \dot{v}_b \quad (4-21)$$

Nach Bestimmung der Spannungsfunktion  $F(x, y)$  (siehe Abschnitt 5.3) können mit Hilfe des Differenzenverfahrens die einzelnen Spannungen in den verschiedenen Maschenpunkten bestimmt werden.

Die Bestimmungsgleichungen für  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  lauten:

$$\sigma_{xk} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_k \approx \frac{1}{\Delta y^2} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (F) \quad (4-22)$$

$$\sigma_{yk} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_k \approx \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad (F) \quad (4-23)$$

Um die Schubspannungen auch in den Maschenpunkten zu erhalten, kann man verschiedene Ausdrücke verwenden:

$$\tau_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \quad (4-24)$$

$$\tau_{xy_k} = -\frac{1}{2\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & k \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 1 \\ \hline k & \\ \hline \end{array} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \quad (4-25)$$

$$\tau_{xy_k} = -\frac{1}{4\Delta x \Delta y} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \left(F\right) \quad (4-26)$$

Die Schubspannungen sind damit in allen Maschenmittelpunkten und Maschenpunkten bekannt. Dadurch ist auch die Möglichkeit gegeben, die genauen Größen der Hauptspannungen in den Maschenpunkten sowie ihre Richtung zu bestimmen.

Die Hauptspannungen betragen dann:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4-27)$$

Die zugehörige Richtung  $\varphi_1$  zwischen  $x$  - Achse  
und Hauptachse 1 ergibt sich zu:

$$\varphi_1 = \arctan \left[ \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right] \quad \text{für } \sigma_x > \sigma_y \quad . \quad (4-28)$$

$$\varphi_1 = \arctan \left[ \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right] + \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \sigma_x < \sigma_y \quad . \quad (4-29)$$

Es ist möglich, die Ergebnisse der Berechnung praktischer  
Beispiele mit der spannungsoptischen Analogie sowie der  
elektrischen Potentialanalogie zu vergleichen. Hierzu ist  
es erforderlich, die Isochromatenlinien ( $\sigma_1 - \sigma_2$ )  
und die Isopachenlinien ( $\sigma_1 + \sigma_2$ ) zu bestimmen.

#### 4.2.3 Differenzengleichungen an koordinatenparallelen Rändern

Bei der Scheibenberechnung sind die Werte der Spannungsfunktion  $F(x, y)$  am Rande und ihre Änderung in der Richtung der Normale als Ausgangswerte der Berechnung bekannt.

Das Rechenraster am Rande bleibt gleich wie im Innern.

Es gelten folgende Gleichungen für die Ränder zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t = a$ :

$$F_{k+1} = F_{k-1} + 2 \cdot \Delta x \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_k, \quad (4-30)$$

$$F_i = F_i + 2 \cdot \Delta y \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_k. \quad (4-31)$$

Die Indizes weisen auf die Rasterpunkte gemäß Bild 4.1 hin, auf die sich die Größen beziehen.

Das Vorzeichen der Ableitung gilt immer für die Richtung der Normale des Scheibenrandes. Die Richtung der Normale ist positiv, wenn sie aus der Scheibe nach außen gerichtet ist.

Diese Festlegung des Vorzeichens ist nicht identisch mit der Vorzeichenregel nach Gleichung (3-41).

Da nach den Ausdrücken (4-13) bis (4-17) einzelne Werte außerhalb des Problemgebietes erforderlich sind, werden diese durch die Gleichungen (4-30) und (4-31) bzw. durch lineare oder parabolische Extrapolation bestimmt. Dadurch erhält man:

$$\frac{1}{\Delta y} \cdot \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline & \textcircled{1} \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \right]_{\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a} = \frac{2}{\Delta y} \cdot \left\{ \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \right]_{\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a} + \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \right]_{\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_a} \right\}, \quad (4-32)$$

$$\frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{stippled} & \textcircled{1} \\ \hline \hline & k \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a = \frac{2}{\Delta y} \cdot \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{stippled} & \textcircled{1} \\ \hline \hline & k \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a - \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{stippled} & \text{stippled} \\ \hline \hline & k \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_a \right\}, (4-33)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{stippled} & \text{stippled} \\ \hline \hline & k \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a = \frac{2}{\Delta x} \cdot \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline & \text{stippled} \\ \hline \hline & k \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a - \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \text{stippled} \\ \hline \hline & k \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_a \right\}, (4-34)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{stippled} & \text{stippled} \\ \hline \hline & k \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a = \frac{2}{\Delta x} \cdot \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{stippled} & \\ \hline \hline & k \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a + \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{stippled} & \text{stippled} \\ \hline \hline & k \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_a \right\}, (4-35)$$

$$\frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{stippled} \\ \hline \hline \text{stippled} \\ \hline \end{array} \hat{v}_b = \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{stippled} \\ \hline \hline \text{stippled} \\ \hline \hline \text{stippled} \\ \hline \hline \text{stippled} \\ \hline \end{array} \hat{v}_b \quad (4-36)$$

$$\frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{stippled} \\ \hline \hline \text{stippled} \\ \hline \end{array} \hat{v}_b = \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{stippled} \\ \hline \hline \text{stippled} \\ \hline \hline \text{stippled} \\ \hline \hline \text{stippled} \\ \hline \end{array} \hat{v}_b \quad (4-37)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \text{shaded} \\ \hline \text{(-1)} & \text{(1)} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{u}_5 = \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \text{shaded} & \text{shaded} \\ \hline & \text{(-2)} & \text{(3)} & \text{(-1)} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{u}_5 \quad (4-38)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{shaded} & \\ \hline \text{(-1)} & \text{(1)} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{u}_5 = \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{shaded} & \text{shaded} & \text{shaded} & \\ \hline \text{(1)} & \text{(-3)} & \text{(2)} & \text{(-1)} \\ \hline \end{array} \cdot \dot{u}_5 \quad (4-39)$$

Wenn die Spannungsfunktion  $F$  bekannt ist, erhält man:

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{ak} = \frac{1}{\Delta y^2} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{(1)} \\ \hline \text{shaded} \\ \hline \text{(-2)} \\ \hline \text{(1)} \\ \hline \end{array} F_a = \frac{1}{\Delta y^2} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{shaded} \\ \hline \text{(-2)} \\ \hline \text{(2)} \\ \hline \end{array} F_a + \frac{1}{\Delta y} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{shaded} \\ \hline \text{(2)} \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_a \quad (4-40)$$

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{ak} = \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{(1)} & \text{shaded} & \text{(1)} \\ \hline \end{array} F_a = \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{shaded} & \text{(2)} \\ \hline \end{array} F_a + \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{shaded} & \text{(2)} \\ \hline \end{array} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_a \quad (4-41)$$

#### 4.2.4 Differenzengleichungen an einspringenden Ecken

In einer einspringenden Ecke ist wegen der Singularität eine besondere Betrachtung notwendig.

Die drei Punkte  $k_{\theta_1}$ ,  $k_{\theta_2}$  und  $k_{\theta_{12}}$  werden im Eckpunkt  $k$  folgendermaßen gemäß Bild 4.4 definiert:

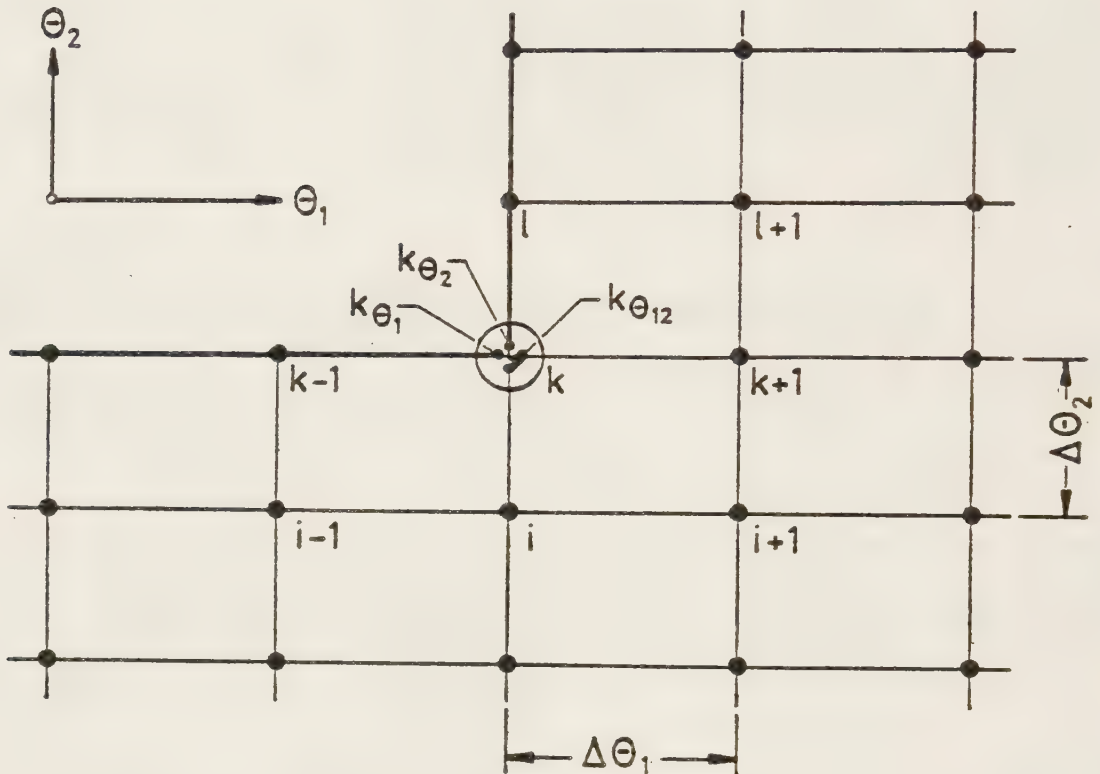


Bild 4.4

Allgemein ist es erforderlich, im Bereich der einspringenden Ecken das Rechenraster zu verfeinern. Durch diese besondere Betrachtung (Bild 4.4) der einspringenden Ecken kann man die Rasterverfeinerung vermeiden. Das vorhandene Rechenraster kann deshalb hinsichtlich seiner Maschenweite auch in einspringenden Ecken ebenso wie im Scheibeninnern beibehalten werden, ohne die Genauigkeit der Lösung zu beeinträchtigen.

Im Punkt k treten folgende Ausdrücke auf:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_1^2} \right)_{k\Theta_1} , & \quad \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_1^2} \right)_{k\Theta_2} , \\ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_2^2} \right)_{k\Theta_1} , & \quad \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_2^2} \right)_{k\Theta_2} , \end{aligned} \right\} \quad (4-42)$$

bzw.

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_1^2} \right)_{k\Theta_{12}} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_1^2} \right)_{k\Theta_1} + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_1^2} \right)_{k\Theta_2} , \quad (4-43)$$

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_2^2} \right)_{k\Theta_{12}} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_2^2} \right)_{k\Theta_1} + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_2^2} \right)_{k\Theta_2} . \quad (4-44)$$

In der einspringenden Ecke treten dementsprechend verschiedene Größen gleichzeitig auf, ähnlich wie beim Querkraftverlauf eines Trägers, welcher durch eine Einzellast P belastet ist.

Das entspricht auch den Untersuchungen nach der Potentialanalogie, welche Chr. Reißmann und K. Kietzer [32] an der Universität Rostock durchgeführt haben. Beim Rechenbeispiel (Bild 7.8) laufen die Isopachenlinien in der einspringenden Ecke, wie es der Potentialanalogie [32] entspricht, in einem Punkt zusammen.

Für den Sonderfall, daß die Ränder im Bereich der einspringenden Ecke nicht belastet sind, ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_1^2}\right)_{k\Theta_1} \equiv \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{kx} = 0 \quad (4-45)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \Theta_2^2}\right)_{k\Theta_2} \equiv \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{ky} = 0 \quad (4-46)$$

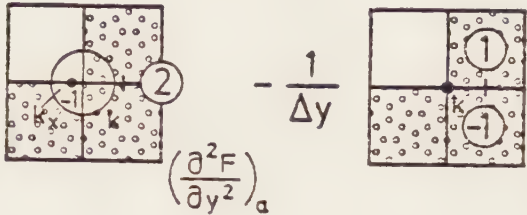
Die Gleichungen (4-13) und (4-14) kann man auch für die einspringende Ecke folgendermaßen schreiben:

$$A_k = \frac{1}{p} \cdot \left\{ \frac{1}{2\Delta x} \cdot \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline & \text{dotted} \\ \hline \text{dotted} & \text{dotted} \\ \hline \end{array} \right]_{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_a} - \frac{1}{\Delta y} \cdot \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline & \text{dotted} \\ \hline \text{dotted} & \text{dotted} \\ \hline \end{array} \right]_{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_a} \right\} \quad (4-47)$$

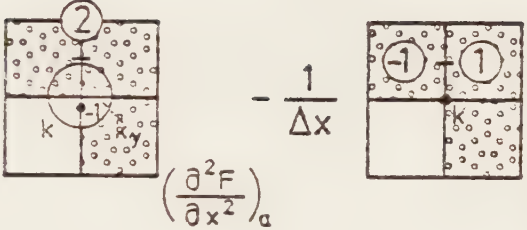
bzw.

$$B_k = \frac{1}{p} \cdot \left\{ \frac{1}{2\Delta y} \cdot \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{dotted} & \text{dotted} \\ \hline \text{dotted} & \text{dotted} \\ \hline \end{array} \right]_{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_a} - \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{dotted} & \text{dotted} \\ \hline \text{dotted} & \text{dotted} \\ \hline \end{array} \right]_{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_a} \right\} \quad (4-48)$$

Berücksichtigt man die Formeln (4-45) und (4-46) bei den Ausdrücken (4-47) und (4-48), erhält man folgende Gleichungen:

$$A_k = \frac{1}{\rho} \cdot \left\{ \frac{1}{2\Delta x} \cdot \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_a - \frac{1}{\Delta y} \cdot \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a \right\} \quad (4-49)$$


bzw.

$$B_k = \frac{1}{\rho} \cdot \left\{ \frac{1}{2\Delta y} \cdot \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_a - \frac{1}{\Delta x} \cdot \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_a \right\} \quad (4-50)$$


Entsprechend kann man auch für alle anderen einspringenden Ecken analoge Ausdrücke für  $A_k$  und  $B_k$  ableiten.

Um die Spannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  in den einspringenden Ecken k zu erhalten, verwendet man folgende Ausdrücke:

$$\sigma_{x_k} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\Delta y^2} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{1} & \\ \hline \text{2} & \\ \hline \text{1} & \\ \hline \end{array} \cdot (F) \quad (4-51)$$

$$\sigma_{y_k} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \text{1} & \\ \hline \text{1} & \text{2} & \text{1} \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot (F) \quad (4-52)$$

Die Schubspannung  $\tau_{xy}$  erhält man mit Hilfe der Gleichung (5-14). Es ergibt sich für Punkt k :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_k = \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{k-1} + \frac{\Delta x}{2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{k-1} + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_k \right] \quad (4-53)$$

Aus der Gleichung (4-53) folgt:

$$\left( -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_k = -\frac{2}{\Delta x} \cdot \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_k - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{k-1} \right] - \left( -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{k-1} \quad (4-54)$$

Die Gleichung (4-54) kann man mit Hilfe der Spannungsfunktion in folgender Form ausdrücken:

$$(\tau_{xy})_k = \left( -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_k = -\left( \frac{2}{\Delta x} \right) \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) + \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \cdot (F) \quad (4-55)$$

Entsprechende Ausdrücke gelten auch für alle anderen einspringenden Ecken, z.B.:

$$(\tau_{xy})_k = \left( -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_k = +\left( \frac{2}{\Delta x} \right) \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) - \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \cdot (F) \quad (4-56)$$

#### 4.2.5 Verschiebungsänderungen für den Zeitpunkt $t = \frac{\Delta t}{2}$

Zur Bestimmung der Verschiebungsänderungen zum Zeitpunkt  $t = \frac{\Delta t}{2}$  werden die Ausdrücke (4-9) und (4-10) umgeschrieben. Die Gleichungen werden für den Zeitpunkt  $t = 0$  aufgestellt.

Im Bild 4.5 ist der Verlauf der Verschiebungsänderungen  $\dot{u}$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  dargestellt.

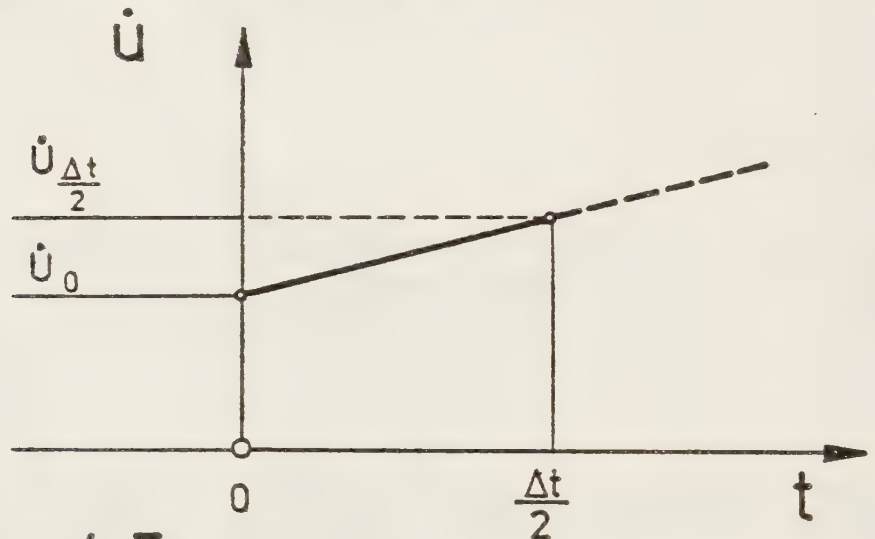


Bild 4.5

Die Gleichung (4-3) geht für den Zeitpunkt  $t = \frac{\Delta t}{2}$  in folgende Form über:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} \right)_0 + \frac{K}{\Delta t} \cdot \dot{u}_0 = \frac{\dot{u}_{\frac{\Delta t}{2}} - \dot{u}_0}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{K}{\Delta t} \cdot \dot{u}_0 \\
 &= \dot{u}_{\frac{\Delta t}{2}} \cdot \frac{2}{\Delta t} - \dot{u}_0 \cdot \frac{(2-K)}{\Delta t} .
 \end{aligned} \tag{4-57}$$

Entsprechend erhält man auch für die andere Richtung durch die Gleichung (4-4) folgenden Ausdruck:

$$B_0 = \dot{v}_{\frac{\Delta t}{2}} \cdot \frac{2}{\Delta t} - \dot{v}_0 \cdot \frac{(2-K)}{\Delta t} . \tag{4-58}$$

Durch Umformen der Gleichungen (4-57) und (4-58) folgt:

$$\dot{u}_{\frac{\Delta t}{2}} = \dot{u}_0 \cdot \left(1 - \frac{K}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2} \cdot A_0 \quad , \quad (4-59)$$

$$\dot{v}_{\frac{\Delta t}{2}} = \dot{v}_0 \cdot \left(1 - \frac{K}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2} \cdot B_0 \quad . \quad (4-60)$$

Die Gleichungen (4-13) bzw. (4-14) liefern zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Werte für  $A_0$  und  $B_0$ , wobei folgende Beziehungen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_a &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{t=0} \quad , \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_a &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{t=0} \quad , \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_a &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{t=0} \quad . \end{aligned} \right\} \quad (4-61)$$

Für praktische Zwecke kann man in den Ausdrücken (4-59) und (4-60) die Werte  $\dot{u}_0 = \dot{v}_0 = 0$  einsetzen.

## 5. Numerische Integration

### 5.1 Wahl der Summationsgleichung

Die Bewegungsgleichung für die gedämpfte erzwungene Schwingung lautet:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = f \quad . \quad (5-1)$$

Die Ausgangswerte  $x_0$ ,  $\dot{x}_0$  und  $\ddot{x}_0$  sollen als bekannt gelten.

Um die Bewegungsgleichung numerisch zu lösen, sind solche Summationsgleichungen zu suchen, deren stellvertretende Differenzenquotienten für die erste und zweite Ableitung nach der Zeit die gleichen Werte für  $\dot{x}$  und  $\ddot{x}$  liefern wie sie vorher bestanden.

Den obigen Forderungen genügen folgende Differenzengleichungen:

$$\dot{x}_t = \dot{x}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \cdot [\ddot{x}_{t-\Delta t} + \ddot{x}_t] \quad . \quad (5-2)$$

und

$$x_t = x_{t-\Delta t} + \Delta t \cdot \dot{x}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{x}_{t-\Delta t} \quad . \quad (5-3)$$

Die Gleichung (5-1) liefert für den Zeitpunkt  $t$ :

$$m \cdot \ddot{x}_t + k \cdot \dot{x}_t + c \cdot x_t = f \quad . \quad (5-4)$$

Da die Werte  $x_{t-\Delta t}$ ,  $\dot{x}_{t-\Delta t}$  und  $\ddot{x}_{t-\Delta t}$  für den Zeitpunkt  $t-\Delta t$  bekannt sein sollen, erhält man durch die Gleichung (5-3) den Wert  $x_t$ .

Um den Wert  $\dot{x}_t$  zu bestimmen, wird das System der Gleichungen (5-4) und (5-2) gelöst und man erhält:

$$\dot{x}_t = \dot{x}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[ \ddot{x}_{t-\Delta t} - \frac{k}{m} \cdot \dot{x}_t - \frac{c}{m} \cdot x_t + \frac{f}{m} \right] \quad (5-5)$$

Die Gleichung (5-5) kann nach  $\dot{x}_t$  aufgelöst werden:

$$\dot{x}_t = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{k}{m}} \cdot \left\{ \dot{x}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[ \ddot{x}_{t-\Delta t} - \frac{c}{m} \cdot x_t + \frac{f}{m} \right] \right\} \quad (5-6)$$

Die Beschleunigung  $\ddot{x}_t$  ergibt sich aus Gleichung (5-4) zu:

$$\ddot{x}_t = -\frac{k}{m} \cdot \dot{x}_t - \frac{c}{m} \cdot x_t + \frac{f}{m} \quad (5-7)$$

Die Gleichungen (5-3), (5-6) und (5-7) für den Zeitpunkt  $t$  werden nach Umstellung für den Einmassenschwinger in folgender Matrizenform geschrieben:

$$x_t = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ 1 \end{bmatrix}_t = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ 1 \end{bmatrix}_{t-\Delta t} = A \cdot x_{t-\Delta t} \quad (5-8)$$

wobei die Matrix  $A$  die Übertragungsmatrix für den Vektor  $x_t$  darstellt.

Die Übertragungsmatrix  $A$  hat folgende Form:

$$A = \frac{1}{m + \frac{\Delta t}{2} \cdot k} \cdot \begin{bmatrix} (m + \frac{\Delta t}{2} \cdot k) & \Delta t (m + \frac{\Delta t}{2} \cdot k) & \frac{\Delta t^2}{2} (m + \frac{\Delta t}{2} \cdot k) & 0 \\ -\frac{\Delta t}{2} \cdot c & (m - \frac{\Delta t^2}{2} \cdot c) & \frac{\Delta t}{2} (m - \frac{\Delta t^2}{2} \cdot c) & \frac{\Delta t}{2} \cdot f \\ -c & -(k + \Delta t \cdot c) & -\frac{\Delta t}{2} \cdot (k + \Delta t \cdot c) & f \\ 0 & 0 & 0 & (m + \frac{\Delta t}{2} \cdot k) \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

Die Übertragungsvektoren  $x_t = A \cdot x_{t-\Delta t}$  haben gemäß (6.14) in einem Zeitintervall  $\Delta t$  folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \Delta t < \Delta t_{Kr} &= \frac{2}{\sqrt{\frac{c}{m}}} \text{ Konvergenz} \quad , \\ \Delta t = \Delta t_{Kr} &\text{ Grenze der numerischen Stabilität} \quad , \\ \Delta t > \Delta t_{Kr} &\text{ Divergenz} \quad . \end{aligned} \quad (5-10)$$

## 5.2 Empfindlichkeit der Summationsgleichung

Um die Empfindlichkeit und die Genauigkeit der Summationsgleichungen zu zeigen, sowie eine Bestätigung für die Größe des kritischen Zeitintervalles gemäß (6.14) zu erhalten, wird als Beispiel ein Einmassenschwinger für eine angegebene Bewegungsgleichung berechnet.

$$\text{Bewegungsgleichung: } 1.\ddot{x} + 2.\dot{x} + 3.x = 4. \quad (5-11)$$

Ausgangswerte:

$$x_0 = 2 \text{ [cm]}, \quad \dot{x}_0 = 4 \text{ [cm.s}^{-1}\text{]}, \quad \ddot{x}_0 = 6 \text{ [cm.s}^{-2}\text{]}. \quad (5-12)$$

Das kritische Zeitintervall beträgt:

$$\Delta t_{kr} = \frac{2}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154\,700\,538 \text{ [s]}.$$

Es werden tabellarisch die Resultate für die folgenden  $\Delta t$ -Werte dargestellt:

Tabelle 5.1 für:

Tabelle 5.2 für:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta t_{kr} \quad [\text{s}], & \Delta t &= \Delta t_{kr} - 1.10^{-9} \quad [\text{s}], \\ \Delta t &= \Delta t_{kr} + 1.10^{-9} \quad [\text{s}], & \Delta t &= \Delta t_{kr} \cdot 0,8660 = 1,00 \quad [\text{s}], \\ \Delta t &= \Delta t_{kr} + 1.10^{-4} \quad [\text{s}], & \Delta t &= \Delta t_{kr} \cdot 0,8054 = 0,93 \quad [\text{s}], \end{aligned}$$

und miteinander verglichen.

Bei  $\Delta t = \Delta t_{kr}$  zeigt sich, daß die Werte für  $\ddot{x}$  und  $x$  ihren absoluten Wert die ganze Zeit beibehalten. Das bedeutet, daß die Berechnung stabil ist.

Um die Rechengenauigkeit zu verfolgen, wurde  $\Delta t_{kr}$  um den Betrag  $1.10^{-9} \text{ [s]}$  vergrößert und verkleinert. Das entspricht etwa  $0,866 \cdot 10^{-7} \%$  von  $\Delta t_{kr}$ .

Bei der Beschleunigung  $\ddot{x}$  sowie bei der Verschiebung  $x$  ist es deutlich zu erkennen, daß bei  $\Delta t > \Delta t_{kr}$  eine Divergenz (Tabelle 5.1) und bei  $\Delta t < \Delta t_{kr}$  eine Konvergenz (Tabelle 5.2) vorhanden ist.

$$1.000000 \cdot \ddot{X} + 2.000000 \cdot \dot{X} + 3.000000 \cdot X = 4.000000$$

$$\Delta t_{\omega} = 1.154700539; X_0 = 2.000000000; \dot{X}_0 = 4.000000000; \ddot{X}_0 = 6.000000000$$

| n  | t            | X            | $\dot{X}$    | $\ddot{X}$    | n  | t            | X            | $\dot{X}$    | $\ddot{X}$    | n  | t            | X            | $\dot{X}$    | $\ddot{X}$    | n  | t            | X           | $\dot{X}$    | $\ddot{X}$    |
|----|--------------|--------------|--------------|---------------|----|--------------|--------------|--------------|---------------|----|--------------|--------------|--------------|---------------|----|--------------|-------------|--------------|---------------|
| 1  | 1.15470054   | 10.618802153 | -4.000000000 | -19.856406447 | 1  | 1.15470054   | 10.618802161 | -4.000000008 | -19.856406466 | 1  | 1.15480000   | 10.619489120 | -4.001197504 | -19.857201093 | 21 | 24.24811131  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 2  | 3.36940108   | 26.287187079 | -0.287187065 | 26.287187119  | 2  | 3.36940108   | 26.287187079 | -0.287187065 | 26.287187119  | 2  | 2.30960000   | -7.241156701 | -0.284971009 | 26.293418120  | 22 | 25.40341184  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 3  | 3.46410162   | 9.955572004  | -0.070619105 | -25.825477894 | 3  | 3.46410162   | 9.955572004  | -0.070619105 | -25.825477894 | 3  | 4.61920000   | -7.293946912 | -0.00247526  | 25.880327685  | 23 | 26.55811238  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 4  | 4.61880216   | 25.856627038 | -0.001480305 | 25.856627038  | 4  | 4.61880216   | 25.856627038 | -0.001480305 | 25.856627038  | 4  | 5.77350269   | 9.952135482  | -0.00233594  | 25.885667881  | 24 | 27.71881299  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 5  | 5.77350269   | 9.952135482  | -0.001480305 | 25.856627038  | 5  | 5.77350269   | 9.952135482  | -0.001480305 | 25.856627038  | 5  | 6.92880000   | -7.289935915 | -0.00222594  | 25.893562661  | 25 | 28.86751366  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 6  | 6.92880000   | -7.289935915 | -0.00222594  | 25.893562661  | 6  | 6.92880000   | -7.289935915 | -0.00222594  | 25.893562661  | 6  | 8.08360000   | -7.289935915 | -0.00222594  | 25.901276447  | 26 | 30.02721400  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 7  | 8.08360000   | -7.289935915 | -0.00222594  | 25.901276447  | 7  | 8.08360000   | -7.289935915 | -0.00222594  | 25.901276447  | 7  | 9.24380000   | -7.304489551 | -0.002234175 | 25.90905702   | 27 | 31.17691454  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 8  | 9.24380000   | -7.304489551 | -0.002234175 | 25.90905702   | 8  | 9.24380000   | -7.304489551 | -0.002234175 | 25.90905702   | 8  | 10.39320000  | -7.317373561 | -0.002232183 | 25.916736319  | 28 | 32.34151777  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 9  | 10.39320000  | -7.317373561 | -0.002232183 | 25.916736319  | 9  | 10.39320000  | -7.317373561 | -0.002232183 | 25.916736319  | 9  | 11.54700000  | -7.329340485 | -0.002230485 | 25.924380338  | 29 | 33.48631561  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 10 | 11.54700000  | -7.329340485 | -0.002230485 | 25.924380338  | 10 | 11.54700000  | -7.329340485 | -0.002230485 | 25.924380338  | 10 | 12.70170592  | -7.340806454 | -0.002228756 | 25.931942044  | 30 | 34.64101615  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 11 | 12.70170592  | -7.340806454 | -0.002228756 | 25.931942044  | 11 | 12.70170592  | -7.340806454 | -0.002228756 | 25.931942044  | 11 | 13.85640646  | -7.351806454 | -0.002227000 | 25.9394469310 | 31 | 35.79571669  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 12 | 13.85640646  | -7.351806454 | -0.002227000 | 25.9394469310 | 12 | 13.85640646  | -7.351806454 | -0.002227000 | 25.9394469310 | 12 | 15.01110700  | -7.362406454 | -0.002225212 | 25.947082115  | 32 | 36.95041723  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 13 | 15.01110700  | -7.362406454 | -0.002225212 | 25.947082115  | 13 | 15.01110700  | -7.362406454 | -0.002225212 | 25.947082115  | 13 | 16.16580754  | -7.372606454 | -0.002223486 | 25.9547168215 | 33 | 38.10511777  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 14 | 16.16580754  | -7.372606454 | -0.002223486 | 25.9547168215 | 14 | 16.16580754  | -7.372606454 | -0.002223486 | 25.9547168215 | 14 | 17.32050809  | -7.382406454 | -0.002221756 | 25.96234335   | 34 | 39.25981831  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 15 | 17.32050809  | -7.382406454 | -0.002221756 | 25.96234335   | 15 | 17.32050809  | -7.382406454 | -0.002221756 | 25.96234335   | 15 | 18.47520861  | -7.391806454 | -0.002220000 | 25.970000000  | 35 | 40.41451884  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 16 | 18.47520861  | -7.391806454 | -0.002220000 | 25.970000000  | 16 | 18.47520861  | -7.391806454 | -0.002220000 | 25.970000000  | 16 | 19.62990915  | -7.400806454 | -0.002218256 | 25.977666667  | 36 | 41.56921930  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 17 | 19.62990915  | -7.400806454 | -0.002218256 | 25.977666667  | 17 | 19.62990915  | -7.400806454 | -0.002218256 | 25.977666667  | 17 | 20.78460969  | -7.409406454 | -0.002216512 | 25.985333333  | 37 | 42.72391994  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 18 | 20.78460969  | -7.409406454 | -0.002216512 | 25.985333333  | 18 | 20.78460969  | -7.409406454 | -0.002216512 | 25.985333333  | 18 | 21.93931024  | -7.417606454 | -0.002214768 | 25.993000000  | 38 | 43.87862046  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 19 | 21.93931024  | -7.417606454 | -0.002214768 | 25.993000000  | 19 | 21.93931024  | -7.417606454 | -0.002214768 | 25.993000000  | 19 | 23.09401077  | -7.425406454 | -0.002213024 | 25.999666667  | 39 | 44.97428264  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 20 | 23.09401077  | -7.425406454 | -0.002213024 | 25.999666667  | 20 | 23.09401077  | -7.425406454 | -0.002213024 | 25.999666667  | 20 | 24.24811131  | -7.432806454 | -0.002211280 | 26.006333333  | 40 | 46.118802156 | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 21 | 24.24811131  | -7.432806454 | -0.002211280 | 26.006333333  | 21 | 24.24811131  | -7.432806454 | -0.002211280 | 26.006333333  | 21 | 25.40341184  | -7.440006454 | -0.002209536 | 26.013000000  | 41 | 47.264722017 | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 22 | 25.40341184  | -7.440006454 | -0.002209536 | 26.013000000  | 22 | 25.40341184  | -7.440006454 | -0.002209536 | 26.013000000  | 22 | 26.55811238  | -7.446906454 | -0.002207792 | 26.019666667  | 42 | 48.409742864 | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 23 | 26.55811238  | -7.446906454 | -0.002207792 | 26.019666667  | 23 | 26.55811238  | -7.446906454 | -0.002207792 | 26.019666667  | 23 | 27.71881299  | -7.453406454 | -0.002206048 | 26.026333333  | 43 | 49.554564000 | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 24 | 27.71881299  | -7.453406454 | -0.002206048 | 26.026333333  | 24 | 27.71881299  | -7.453406454 | -0.002206048 | 26.026333333  | 24 | 28.86751366  | -7.459506454 | -0.002204304 | 26.033000000  | 44 | 50.69921315  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 25 | 28.86751366  | -7.459506454 | -0.002204304 | 26.033000000  | 25 | 28.86751366  | -7.459506454 | -0.002204304 | 26.033000000  | 25 | 30.02721400  | -7.465206454 | -0.002202560 | 26.039666667  | 45 | 51.84392426  | 9.952135482 | -0.002240185 | -26.007684592 |
| 26 | 30.02721400  | -7.465206454 | -0.002202560 | 26.039666667  | 26 | 30.02721400  | -7.465206454 | -0.002202560 | 26.039666667  | 26 | 31.17691454  | -7.470506454 | -0.002200816 | 26.046333333  |    |              |             |              |               |
| 27 | 31.17691454  | -7.470506454 | -0.002200816 | 26.046333333  | 27 | 31.17691454  | -7.470506454 | -0.002200816 | 26.046333333  | 27 | 32.34151777  | -7.475406454 | -0.002199072 | 26.053000000  |    |              |             |              |               |
| 28 | 32.34151777  | -7.475406454 | -0.002199072 | 26.053000000  | 28 | 32.34151777  | -7.475406454 | -0.002199072 | 26.053000000  | 28 | 33.48631561  | -7.480006454 | -0.002197328 | 26.059666667  |    |              |             |              |               |
| 29 | 33.48631561  | -7.480006454 | -0.002197328 | 26.059666667  | 29 | 33.48631561  | -7.480006454 | -0.002197328 | 26.059666667  | 29 | 34.64101615  | -7.484206454 | -0.002195584 | 26.066333333  |    |              |             |              |               |
| 30 | 34.64101615  | -7.484206454 | -0.002195584 | 26.066333333  | 30 | 34.64101615  | -7.484206454 | -0.002195584 | 26.066333333  | 30 | 35.79571669  | -7.488006454 | -0.002193840 | 26.073000000  |    |              |             |              |               |
| 31 | 35.79571669  | -7.488006454 | -0.002193840 | 26.073000000  | 31 | 35.79571669  | -7.488006454 | -0.002193840 | 26.073000000  | 31 | 36.95041723  | -7.491806454 | -0.002192096 | 26.079666667  |    |              |             |              |               |
| 32 | 36.95041723  | -7.491806454 | -0.002192096 | 26.079666667  | 32 | 36.95041723  | -7.491806454 | -0.002192096 | 26.079666667  | 32 | 38.10511777  | -7.495406454 | -0.002190352 | 26.086333333  |    |              |             |              |               |
| 33 | 38.10511777  | -7.495406454 | -0.002190352 | 26.086333333  | 33 | 38.10511777  | -7.495406454 | -0.002190352 | 26.086333333  | 33 | 39.25981831  | -7.498806454 | -0.002188608 | 26.093000000  |    |              |             |              |               |
| 34 | 39.25981831  | -7.498806454 | -0.002188608 | 26.093000000  | 34 | 39.25981831  | -7.498806454 | -0.002188608 | 26.093000000  | 34 | 40.41451884  | -7.502006454 | -0.002186864 | 26.099666667  |    |              |             |              |               |
| 35 | 40.41451884  | -7.502006454 | -0.002186864 | 26.099666667  | 35 | 40.41451884  | -7.502006454 | -0.002186864 | 26.099666667  | 35 | 41.56921930  | -7.505006454 | -0.002185120 | 26.106333333  |    |              |             |              |               |
| 36 | 41.56921930  | -7.505006454 | -0.002185120 | 26.106333333  | 36 | 41.56921930  | -7.505006454 | -0.002185120 | 26.106333333  | 36 | 42.72391994  | -7.507806454 | -0.002183376 | 26.113000000  |    |              |             |              |               |
| 37 | 42.72391994  | -7.507806454 | -0.002183376 | 26.113000000  | 37 | 42.72391994  | -7.507806454 | -0.002183376 | 26.113000000  | 37 | 43.87862046  | -7.510406454 | -0.002181632 | 26.119666667  |    |              |             |              |               |
| 38 | 43.87862046  | -7.510406454 | -0.002181632 | 26.119666667  | 38 | 43.87862046  | -7.510406454 | -0.002181632 | 26.119666667  | 38 | 44.97428264  | -7.512806454 | -0.002179888 | 26.126333333  |    |              |             |              |               |
| 39 | 44.97428264  | -7.512806454 | -0.002179888 | 26.126333333  | 39 | 44.97428264  | -7.512806454 | -0.002179888 | 26.126333333  | 39 | 46.118802156 | -7.515406454 | -0.002178144 | 26.133000000  |    |              |             |              |               |
| 40 | 46.118802156 | -7.515406454 | -0.002178144 | 26.133000000  | 40 | 46.118802156 | -7.515406454 | -0.002178144 | 26.133000000  | 40 | 47.264722017 | -7.517606454 | -0.002176400 | 26.139666667  |    |              |             |              |               |
| 41 | 47.264722017 | -7.517606454 | -0.002176400 | 26.139666667  | 41 | 47.264722017 | -7.517606454 | -0.002176400 | 26.139666667  | 41 | 48.409742864 | -7.519806454 | -0.002174656 | 26.146333333  |    |              |             |              |               |
| 42 | 48.409742864 | -7.519806454 | -0.002174656 | 26.146333333  | 42 | 48.409742864 | -7.519806454 | -0.002174656 | 26.146333333  | 42 | 49.554564000 | -7.521806454 | -0.002172912 | 26.153000000  |    |              |             |              |               |
| 43 | 49.554564000 | -7.521806454 | -0.002172912 | 26.153000000  | 43 | 49.554564000 | -7.521806454 | -0.002172912 | 26.153000000  | 43 | 50.69921315  | -7.523806454 | -0.002171168 | 26.159666667  |    |              |             |              |               |
| 44 | 50.69921315  | -7.523806454 | -0.002171168 | 26.159666667  | 44 | 50.69921315  | -7.523806454 | -0.002171168 | 26.159666667  | 44 | 51.84392426  | -7.525806454 | -0.002169424 | 26.166333333  |    |              |             |              |               |
| 45 | 51.84392426  | -7.525806454 | -0.002169424 | 26.166333333  | 45 | 51.84392426  |              |              |               |    |              |              |              |               |    |              |             |              |               |

| $1.000000 \cdot \ddot{X} + 2.000000 \cdot \dot{X} + 3.000000 \cdot X = 4.000000$               |             |               |              |               |    |             |              |               |               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|---------------|--------------|---------------|----|-------------|--------------|---------------|---------------|
| $\Delta t = 1.154700537; X_0 = 2.000000000; \dot{X}_0 = 4.000000000; \ddot{X}_0 = 6.000000000$ |             |               |              |               |    |             |              |               |               |
| n                                                                                              | t           | X             | $\dot{X}$    | $\ddot{X}$    | n  | t           | X            | $\dot{X}$     | $\ddot{X}$    |
| 1                                                                                              | 1.15470054  | 10.618802138  | -3.995999983 | -19.856406448 | 1  | 0.93000000  | 8.314700000  | -1.527982743  | -17.888134715 |
| 2                                                                                              | 2.30940107  | -7.8737604257 | -0.287187110 | 26.287186991  | 2  | 0.93000000  | -0.042047715 | -3.529175504  | 13.584494153  |
| 3                                                                                              | 3.66410161  | 9.955571918   | -0.02619073  | -25.885477608 | 3  | 0.93000000  | 1.750433563  | 1.147800548   | -3.537061784  |
| 4                                                                                              | 4.1880215   | -7.895221967  | -0.001486416 | 25.858676734  | 4  | 0.93000000  | 1.37200000   | -0.0284159988 | 0.557189664   |
| 5                                                                                              | 5.77350248  | 9.952153043   | -0.000106856 | -25.856406448 | 5  | 0.93000000  | 1.283710104  | 0.07619248    | -0.055776552  |
| 6                                                                                              | 6.92820322  | -7.895467354  | -0.000007668 | 25.85641387   | 6  | 0.93000000  | 1.330435871  | -0.000380479  | -6.004488105  |
| 7                                                                                              | 8.08990376  | 9.952135348   | -0.000000517 | -25.856406448 | 7  | 0.93000000  | 1.337188795  | -0.000884517  | 0.003404151   |
| 8                                                                                              | 9.23760430  | -7.895468547  | -0.000000071 | 25.856406448  | 8  | 0.93000000  | 1.333437819  | 0.000286350   | -0.000886156  |
| 9                                                                                              | 10.39130483 | 9.952131585   | 0.000000028  | -25.856406448 | 9  | 0.93000000  | 1.333332806  | 0.0000006154  | -0.000149369  |
| 10                                                                                             | 11.54700537 | -7.895468482  | -0.000000031 | 25.856406448  | 10 | 0.93000000  | 1.333333373  | 0.0000006917  | -0.000012957  |
| 11                                                                                             | 12.70170591 | 9.952135113   | 0.000000031  | -25.856406448 | 11 | 10.23000000 | 1.333333372  | -0.000000055  | -0.0000001126 |
| 12                                                                                             | 13.85440644 | -7.895468409  | -0.000000031 | 25.856406448  | 12 | 11.16000000 | 1.333333397  | -0.000000229  | 0.0000000853  |
| 13                                                                                             | 15.01110698 | 9.952135040   | 0.000000031  | -25.856406448 | 13 | 12.09000000 | 1.333333360  | 0.000000072   | -0.000000222  |
| 14                                                                                             | 16.16800752 | -7.895468337  | -0.000000031 | 25.856406448  | 14 | 13.02000000 | 1.333333330  | -0.000000014  | 0.000000038   |
| 15                                                                                             | 17.32050805 | 9.952134967   | 0.000000031  | -25.856406448 | 15 | 13.95000000 | 1.333333333  | 0.000000002   | -0.000000004  |
| 16                                                                                             | 18.47500859 | -7.895468764  | -0.000000031 | 25.856406448  | 16 | 14.88000000 | 1.333333333  | -0.000000000  | -0.000000000  |
| 17                                                                                             | 19.62990813 | 9.952134895   | 0.000000031  | -25.856406448 | 17 | 15.81000000 | 1.333333333  | -0.000000000  | 0.000000000   |
| 18                                                                                             | 20.78460967 | -7.895468192  | -0.000000031 | 25.856406448  | 18 | 16.74000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | -0.000000000  |
| 19                                                                                             | 21.93931020 | 9.952134822   | 0.000000031  | -25.856406448 | 19 | 17.67000000 | 1.333333333  | -0.000000000  | 0.000000000   |
| 20                                                                                             | 23.09401074 | -7.895468119  | -0.000000031 | 25.856406448  | 20 | 18.60000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | -0.000000000  |
| 21                                                                                             | 24.24871128 | 9.952134749   | 0.000000031  | -25.856406448 | 21 | 19.53000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 22                                                                                             | 25.40341181 | -7.895468046  | -0.000000031 | 25.856406448  | 22 | 20.46000000 | 1.333333333  | -0.000000002  | 0.000000000   |
| 23                                                                                             | 26.55811235 | 9.952134677   | 0.000000031  | -25.856406448 | 23 | 21.39000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 24                                                                                             | 27.71281289 | -7.895467974  | -0.000000031 | 25.856406448  | 24 | 22.32000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | -0.000000000  |
| 25                                                                                             | 28.86751342 | 9.952134604   | 0.000000031  | -25.856406448 | 25 | 23.25000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 26                                                                                             | 30.02221396 | -7.895467901  | -0.000000031 | 25.856406448  | 26 | 24.18000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 27                                                                                             | 31.17691450 | 9.952134531   | 0.000000031  | -25.856406448 | 27 | 25.11000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 28                                                                                             | 32.33161504 | -7.895467808  | -0.000000031 | 25.856406448  | 28 | 26.04000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 29                                                                                             | 33.48631557 | 9.952134459   | 0.000000031  | -25.856406448 | 29 | 26.97000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 30                                                                                             | 34.64101611 | -7.895467756  | -0.000000031 | 25.856406448  | 30 | 27.90000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 31                                                                                             | 35.79571665 | 9.952134306   | 0.000000031  | -25.856406448 | 31 | 28.83000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 32                                                                                             | 36.95041718 | -7.895467683  | -0.000000031 | 25.856406448  | 32 | 29.76000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 33                                                                                             | 38.10511772 | 9.952134313   | 0.000000031  | -25.856406448 | 33 | 30.69000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 34                                                                                             | 39.25981826 | -7.895467610  | -0.000000031 | 25.856406448  | 34 | 31.62000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 35                                                                                             | 40.41451879 | 9.952134241   | 0.000000031  | -25.856406448 | 35 | 32.55000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 36                                                                                             | 41.56921933 | -7.895467538  | -0.000000031 | 25.856406448  | 36 | 33.48000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 37                                                                                             | 42.72391987 | 9.952134168   | 0.000000031  | -25.856406448 | 37 | 34.41000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 38                                                                                             | 43.87862041 | -7.895467465  | -0.000000031 | 25.856406448  | 38 | 35.34000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 39                                                                                             | 45.03332094 | 9.952134096   | 0.000000031  | -25.856406448 | 39 | 36.27000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 40                                                                                             | 46.18802148 | -7.895467392  | -0.000000031 | 25.856406448  | 40 | 37.20000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 41                                                                                             | 47.34272202 | 9.952134023   | 0.000000031  | -25.856406448 | 41 | 38.13000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 42                                                                                             | 48.49742255 | -7.895467320  | -0.000000031 | 25.856406448  | 42 | 39.06000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 43                                                                                             | 49.65212304 | 9.952133950   | 0.000000031  | -25.856406448 | 43 | 39.99000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 44                                                                                             | 50.80682363 | -7.895467247  | -0.000000031 | 25.856406448  | 44 | 40.92000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |
| 45                                                                                             | 51.96152416 | 9.952133878   | 0.000000031  | -25.856406448 | 45 | 41.85000000 | 1.333333333  | 0.000000000   | 0.000000000   |

## Table 5.2

Aus den Ergebnissen (siehe Tabellen 5.1 und 5.2) ist die große Genauigkeit der Übertragungsvektoren und der Ermittlung des kritischen Zeitintervalles ersichtlich.

Das kritische Zeitintervall ist bei gedämpfter oder ungedämpfter Schwingung gleich und beträgt gemäß (6-14):

$$\Delta t_{kr} = \frac{2}{\sqrt{\frac{c}{m}}} \quad (5-13)$$

### 5.3 Bestimmung der Spannungsfunktion

Die Gleichungen (5-2) und (5-3) werden auch für die Bestimmung der Spannungsfunktion verwendet, wobei die Werte für die zweite Ableitung der Spannungsfunktion durch die "dynamische Relaxation" gewonnen werden.

Wie schon im Abschnitt 4.1 erwähnt wurde, konvergiert der Funktionswert  $F^x$  mit der wachsenden Zeit zu dem endgültigen Funktionswert der Airy-schen Spannungsfunktion  $F$ .

Die Ausgangswerte  $(\frac{\partial^2 F}{\partial n^2})$ ,  $(\frac{\partial F}{\partial n})$  und  $F$  der Spannungsfunktion am Rande sind bekannt.

Durch die numerische Integration sind die Werte  $(\frac{\partial F}{\partial n})$  und  $F$  im Scheibeninnern so zu bestimmen, daß sich bei der Bestimmung der Spannung  $\sigma_i$  mit Hilfe der Spannungsfunktion  $F$  nach dem Differenzenverfahren der Wert  $\sigma_i = (\frac{\partial^2 F}{\partial n^2})_i$  ergibt.

Gleichzeitig muß die numerische Integration auch numerische Stabilität besitzen.

Die folgenden Summationsgleichungen für Punkt  $i$  (Bild 5.1) genügen den Forderungen:

$$(\frac{\partial F}{\partial n})_i = (\frac{\partial F}{\partial n})_{i-1} + \frac{\Delta n}{2} \cdot [(\frac{\partial^2 F}{\partial n^2})_{i-1} + (\frac{\partial^2 F}{\partial n^2})_i] , \quad (5-14)$$

und für die Spannungsfunktion:

$$F_i = F_{i-1} + \Delta n \cdot (\frac{\partial F}{\partial n})_{i-1} + \frac{\Delta n^2}{2} \cdot (\frac{\partial^2 F}{\partial n^2})_{i-1} . \quad (5-15)$$

Entsprechend erhält man auch für den Punkt  $i + 1$  den folgenden Ausdruck:

$$F_{i+1} = F_i + \Delta n \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial n} \right)_i + \frac{\Delta n^2}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \right)_i . \quad (5-16)$$

Die Spannung  $\sigma_i$  im Punkt  $i$  ergibt sich durch das Differenzenverfahren zu:

$$\sigma_i = \frac{F_{i-1} - 2 \cdot F_i + F_{i+1}}{\Delta n^2} . \quad (5-17)$$

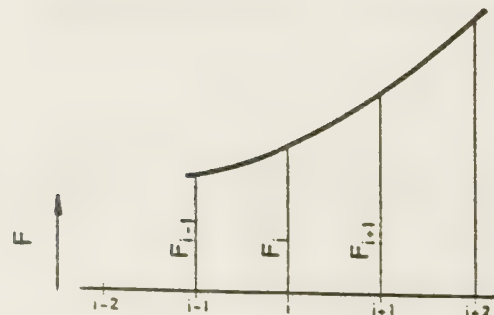
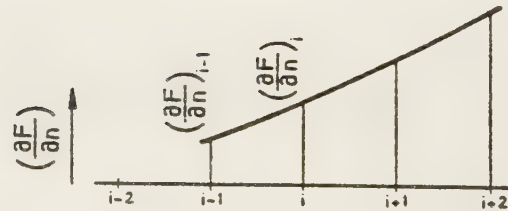
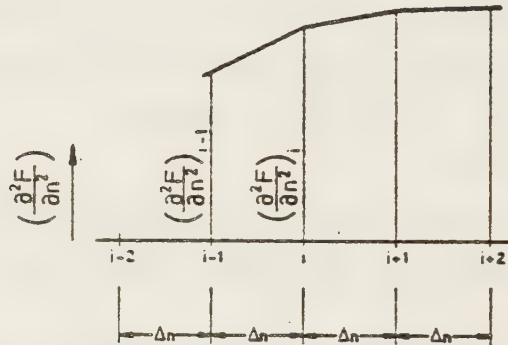


Bild 5.1

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (5-15) und (5-16) folgt aus dem Ausdruck (5-17):

$$\sigma_i = \frac{1}{\Delta n} \cdot \left\{ \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial n} \right)_i - \left( \frac{\partial F}{\partial n} \right)_{i-1} \right] + \frac{\Delta n}{2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \right)_i - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \right)_{i-1} \right] \right\} \quad (5-18)$$

Nach Einsetzen des Ausdruckes (5-14) in die Gleichung (5-18) erhält man:

$$\sigma_i = \frac{1}{\Delta n} \cdot \left\{ \frac{\Delta n}{2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \right)_i + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \right)_{i-1} \right] + \frac{\Delta n}{2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \right)_i - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \right)_{i-1} \right] \right\}, \quad (5-19)$$

bzw.

$$\sigma_i = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \right)_i \quad (5-20)$$

## 6. Stabilitätskriterium für die numerische Berechnung

### 6.1 Einführung

Das Stabilitätskriterium für die numerische Berechnung bei der "dynamischen Relaxation" ist durch verschiedene Autoren wie Hansson [ 22 ], Schnellenbach [ 15 ] u.a. untersucht worden.

Hansson [ 22 ] hat bei der Herleitung für die Bestimmung des kritischen Zeitintervalls  $\Delta t$  des Einmassenschwingers die mechanische Energie herangezogen. Da die Angaben zur Größe des kritischen Zeitschrittes nicht befriedigend waren, erwies sich eine neue theoretische Untersuchung des kritischen Zeitintervalls des Einmassenschwingers als notwendig.

Es wird auch die Stabilität der numerischen Berechnung an einem Maschenelement  $\Delta \theta_1 \times \Delta \theta_2$  getrennt für die Normal- bzw. Schubspannungen untersucht.

## 6.2 Einmassenschwinger

Zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens einer erregten Masse auf federndem Halbraum ist eine lineare Abhängigkeit zwischen der Rückstellkraft und Formänderung nicht ganz zutreffend.

Schwingungen, deren Rückstellkräfte nach der Form  $R = f(x)$  verlaufen, werden in der Literatur von Klotter [39] und Hübner [38] behandelt.

Für die ungedämpfte freie Schwingung folgt die Bewegungsgleichung in folgender Form:

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = 0 \quad (6-1)$$

Die Beschleunigung kann man folgendermaßen schreiben:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} \cdot \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\dot{x}^2)}{dx} \quad (6-2)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (6-2) liefert die Gleichung (6-1):

$$d(\dot{x}^2) = 2 \cdot \ddot{x} \cdot dx = -\frac{2}{m} \cdot f(x) \cdot dx \quad (6-3)$$



Durch Integration über die Zeit  $t$  erhält man:

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4} = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \int_x^{x_0} f(x) \cdot dx}} \quad (6-6)$$

Entsprechend dem Vorgehen bei harmonischen Schwingungen wird auch hier eine zugeordnete Kreisfrequenz  $\bar{\omega}$  definiert:

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{T}{4}} \quad (6-7)$$

Wird die Gleichung (6-6) in (6-7) eingesetzt, ergibt sich:

$$\bar{\omega} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \int_x^{x_0} f(x) \cdot dx}}} \quad (6-8)$$

Im Gegensatz zur harmonischen Schwingung ist die fiktive Eigenkreisfrequenz  $\bar{\omega}$  hier von der Amplitude  $x$  abhängig.

Für die harmonische ungedämpfte Schwingung gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0 \quad , \quad (6-9)$$

mit einer Rückstellkraft in der Größe von

$$R = f(x) = c \cdot x \quad . \quad (6-10)$$

Um die fiktive Kreisfrequenz  $\bar{\omega}$  zu bestimmen, wird die Gleichung (6-8) verwendet. Sie lautet:

$$\bar{\omega}_{HS} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \int_{x=0}^{x_0} c \cdot x \, dx}}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\int_{x_0}^0 \frac{dx}{x_0 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}}} \quad . \quad (6-11)$$

Nach Integration und gemäß Bild 6.2 folgt:

$$\bar{\omega}_{HS} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\Delta t_{\max}} = -\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} \quad . \quad (6-12)$$

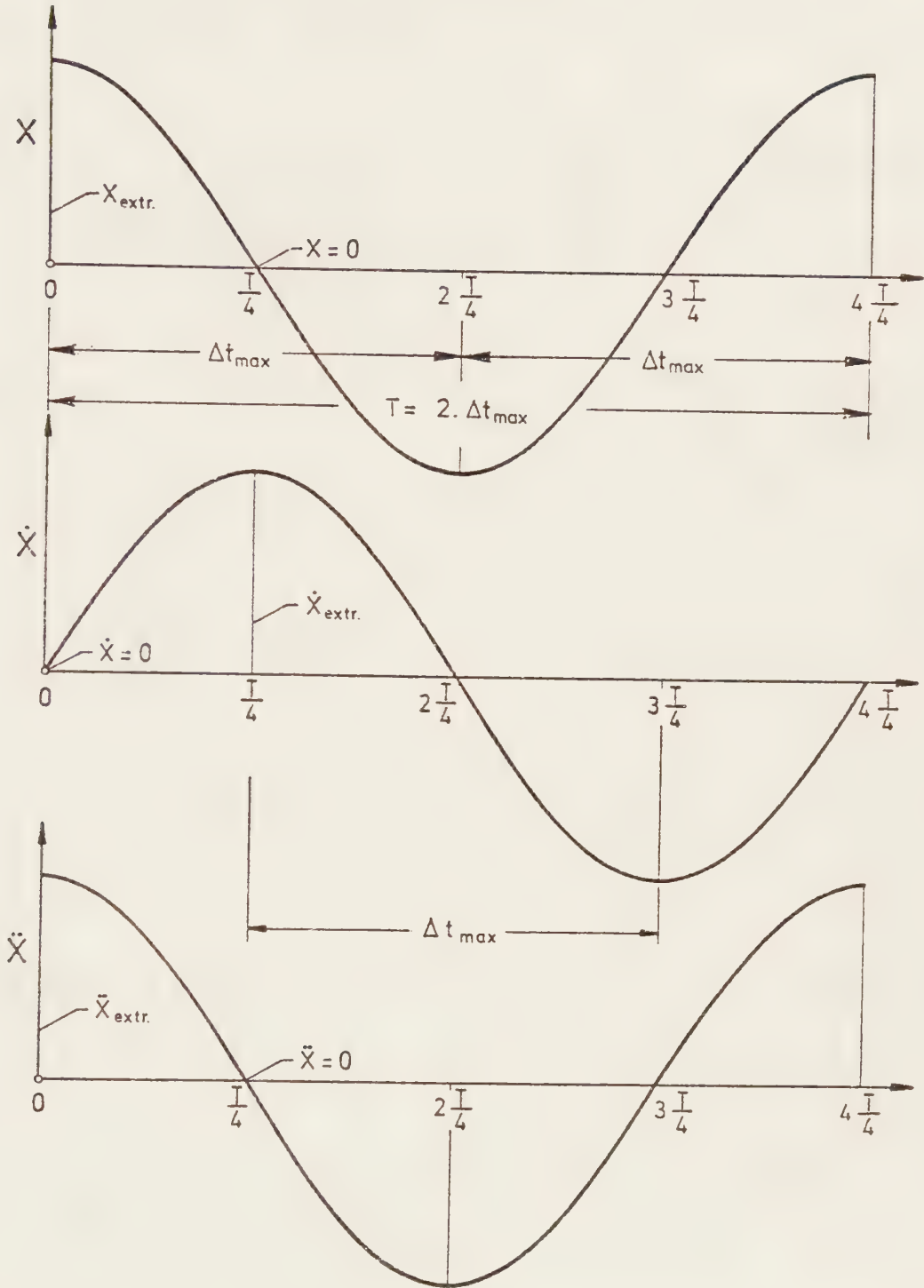


Bild 6.2

Durch Umordnung der Gleichung (6-12) und unter Beachtung, daß die Eigenkreisfrequenz des Einmassenschwingers  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$  ist, erhält man:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = -\frac{2}{\Delta t_{\max}} , \quad (6-13)$$

bzw.

$$\Delta t_{\max}^2 = \frac{4}{\frac{c}{m}} . \quad (6-14)$$

### 6.3 Maschenelement durch Spannung $\sigma_{\theta_1}$ belastet

Das Element gemäß Bild 6.3 wird nur durch eine Spannung  $\sigma_{\theta_1}$  belastet.

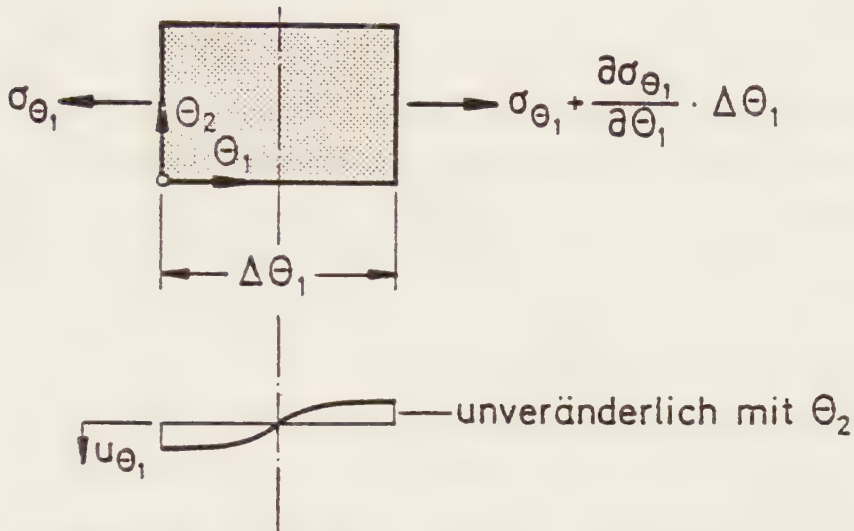


Bild 6.3

Die Grundbewegungsgleichung mit den dynamischen Gliedern geht in folgende Form über:

$$\sigma_{\theta_1, \theta_1} = \rho \cdot \ddot{u}_{\theta_1} + \rho \cdot \left( \frac{K}{\Delta t} \right) \cdot \dot{u}_{\theta_1} \quad (6-15)$$

Für den ebenen Spannungszustand unter Vernachlässigung des Querkontraktionsanteiles aus der Veränderung der Verschiebung  $u_{\theta_2}$  in der  $\theta_2$ -Richtung folgt:

$$\sigma_{\theta_1} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot u_{\theta_1, \theta_1} \quad (6-16)$$

Dadurch kann die Gleichung (6-15) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{E}{\rho(1-v^2)} \cdot u_{\theta_1, \theta_1, \theta_1} = \ddot{u}_{\theta_1} + \left(\frac{K}{\Delta t}\right) \cdot \dot{u}_{\theta_1} \quad (6-17)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie wird folgender Ansatz für die Verschiebung  $u_{\theta_1}$  für den Zeitpunkt  $t$  gemacht:

$$u_{\theta_1} = e^{\omega t} \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\pi \theta_1}{\Delta \theta_1}\right) \quad (6-18)$$

Dieser Ansatz liefert durch die Gleichung (6-17) die charakteristische Gleichung:

$$f(\omega) = \omega^2 + \left(\frac{K}{\Delta t}\right) \cdot \omega + \frac{E}{(1-v^2)\rho} \cdot \left(\frac{\pi}{\Delta \theta_1}\right)^2 = 0 \quad (6-19)$$

Die kritische Dämpfung des Maschenelementes tritt dann auf, wenn der Wurzelwert des Radikanden verschwindet bzw.  $\frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} = 0$  ist. Daraus folgt:

$$\left[\omega + \frac{1}{2} \left(\frac{K}{\Delta t}\right)\right]^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{K}{\Delta t}\right)^2 - \frac{E}{(1-v^2)\rho} \cdot \left(\frac{\pi}{\Delta \theta_1}\right)^2 = 0 \quad (6-20)$$

Hieraus ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\omega = -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{K}{\Delta t} \right) , \quad (6-21)$$

und

$$\left( \frac{K}{\Delta t} \right) = \left( \frac{2\pi}{\Delta \Theta_1} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}} . \quad (6-22)$$

Der Wert  $\omega$  bedeutet die Eigenfrequenz des Elementes.

Nach Gleichung (6-13) beträgt  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = -2/\Delta t$ .

Daraus folgt:

$$\omega = -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{K_M}{\Delta t} \right) = -\frac{2}{\Delta t} , \quad (6-23)$$

bzw.

$$K_M = K_{\text{Masche}} = 4 . \quad (6-24)$$

Aus der Gleichung (6-22) und unter Berücksichtigung des Ausdrucks (6-24) ergibt sich:

$$\Delta t = \left( \frac{2 \cdot \Delta \Theta_1}{\pi} \right) \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \sqrt{(1-\nu^2)} . \quad (6-25)$$

# 6.4 Maschenelement durch Schubspannung $\tau_{\theta_1 \theta_2}$ belastet

Betrachten wir ein Element, welches nur durch die Schubbelastung  $\tau_{\theta_1 \theta_2}$  auf der  $\Delta\theta_2$ -Fläche gemäß Bild 6.4 belastet ist.

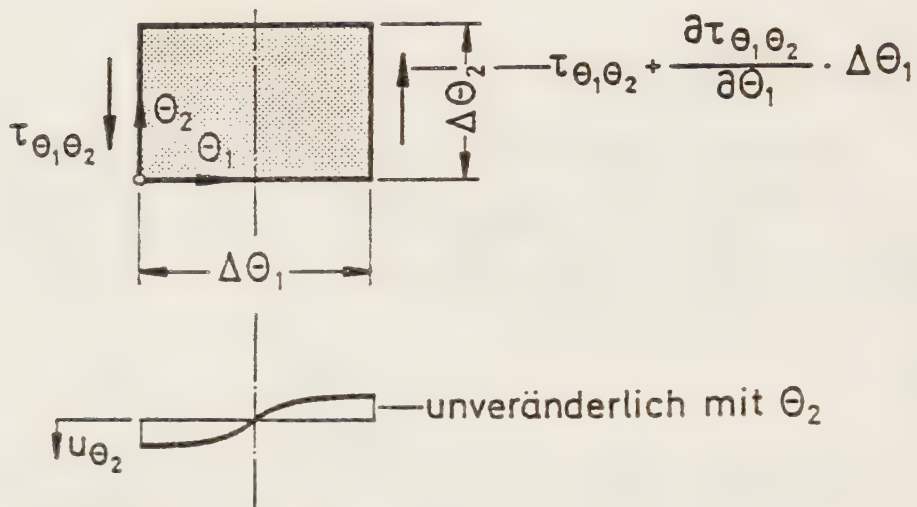


Bild 6.4

Die Grundbewegungsgleichung geht in die folgende Form über:

$$\tau_{\theta_1 \theta_2, \theta_1} = \rho \cdot \ddot{u}_{\theta_2} + \rho \cdot \left( \frac{K}{\Delta t} \right) \cdot \dot{u}_{\theta_2} \quad (6-26)$$

Bei Vernachlässigung der Veränderung der Verschiebung  $u_{\theta_1}$  in der  $\theta_2$ -Richtung ergibt sich:

$$\tau_{\theta_1 \theta_2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot u_{\theta_2, \theta_1} \quad (6-27)$$

Die Gleichungen (6-26) und (6-27) liefern folgende Differentialgleichung:

$$\frac{E}{2(1+\nu)\rho} \cdot u_{\theta_2, \theta_1 \theta_1} = \ddot{u}_{\theta_2} + \left( \frac{K}{\Delta t} \right) \cdot \dot{u}_{\theta_2} \quad (6-28)$$

Der Ansatz für die Verschiebung  $u_{\Theta_2}$  lautet:

$$u_{\Theta_2} = e^{\omega t} \cdot A \cdot \cos \left( \frac{\pi \Theta_1}{\Delta \Theta_1} \right) \quad (6-29)$$

Dieser Ansatz liefert mit der Gleichung (6-28) die charakteristische Gleichung:

$$f(\omega) = \omega^2 + \left( \frac{K}{\Delta t} \right) \cdot \omega + \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \cdot \left( \frac{\pi}{\Delta \Theta_1} \right)^2 = 0 \quad (6-30)$$

Die kritische Dämpfung des Maschenelementes liegt vor, wenn

$$\frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} = 2\omega + \left( \frac{K}{\Delta t} \right) = 0 \quad (6-31)$$

ist. Daraus folgt:

$$\omega = -\frac{1}{2} \left( \frac{K}{\Delta t} \right) \quad (6-32)$$

Die Gleichungen für die Eigenfrequenz sind in den beiden Lastfällen gemäß Bild 6.3 und 6.4 gleich. Entsprechend wie vorher (Abschnitt 6.3) muß nun auch hier die Dämpfungs-konstante folgenden Wert haben:

$$K_M = 4 \quad (6-33)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (6-30), (6-32) und (6-33) ergibt sich:

$$\Delta t = \left( \frac{2 \cdot \Delta \Theta_1}{\pi} \right) \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \sqrt{2(1+\nu)} \quad (6-34)$$

Allgemein wirken auf ein Maschenelement gleichzeitig die Normalspannungen und die Schubspannungen in beiden Richtungen. Dadurch wird der kritische Zeitschritt  $\Delta t$  größer bzw. kleiner als in den ausgerechneten Grenzfällen.

### 6.5 Numerische Untersuchung des Grenzzeitintervalles für Zeitschritt $\Delta t$

---

Um die vorherige Theorie zu bestätigen, wurden die rechnerischen Grenzzeitintervalle  $\Delta t$  für verschiedene Scheiben untersucht. Als Grundwerte des Materials wurden eingesetzt:

$$E = 3,5 \cdot 10^8 \text{ [ kg cm s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-2} ] ,$$

$$\rho = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ [ kg cm}^{-3} ] ,$$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^8}} = 1,701 \ 438 \cdot 10^{-6} \text{ [ cm}^{-1} \cdot \text{s] } .$$

Tabelle 6.1 stellt die Resultate der numerischen Untersuchung dar.

Die Vergleichsrechnungen zeigen deutlich, daß die Schwingung des Maschenelementes für die Bestimmung des Zeitintervalles  $\Delta t$  maßgebend und zutreffend ist.

Die Untersuchungen für ganz verschiedene Scheiben und Belastungen ergeben dicht beieinanderliegende Kurven (Bild 6.5).

Wegen des gleichzeitigen Auftretens der Schub- und Normalspannungen befinden sich die Grenzkurven gemäß Bild 6.5 oberhalb von  $f(\sigma_{\theta_1})$ . Man sieht, daß der Einfluß der Schubspannungen sehr gering im Vergleich zu dem der Normalspannungen ist. Es kann aufgrund der Untersuchungen angenommen werden, daß die numerische Stabilität noch gewährleistet ist, wenn

$$\Delta t \approx 1,10 \cdot \frac{2 \cdot \Delta \theta}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot (1 - \nu^2)}{E}} \quad (6-35)$$

ist.

|                                                                                                         |                                                                                     | $\Delta\Theta$<br>[cm] | $\nu$ |       |       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-------|-------|-------|
|                                                                                                         |                                                                                     |                        | 0,0   | 0,2   | 0,4   |
| $\Delta t_{\text{Konverg. Grenz}} \cdot 10^6$<br>[ s ]                                                  |    | 2,00                   | 3,78  | 3,71  | 3,47  |
|                                                                                                         |    | 5,00                   | 9,48  | 9,30  | 8,70  |
|                                                                                                         |    | 10,00                  | 19,0  | 18,7  | 17,5  |
| $\frac{\Delta t_{\text{Konverg. Grenz}}}{\frac{2 \cdot \Delta\Theta}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}}}$ |    | 2,00                   | 1,111 | 1,090 | 1,020 |
|                                                                                                         |  | 5,00                   | 1,114 | 1,093 | 1,023 |
|                                                                                                         |  | 10,00                  | 1,117 | 1,099 | 1,029 |
| $\frac{\Delta t}{\frac{2 \cdot \Delta\Theta}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}}}$                         | $= f(\sigma_{\theta_1}) = \sqrt{(1-\nu^2)}$                                         |                        | 1,000 | 0,980 | 0,917 |
|                                                                                                         | $= f(\tau_{\theta_1 \theta_2}) = \sqrt{2 \cdot (1+\nu)}$                            |                        | 1,414 | 1,549 | 1,673 |

Tabelle 6.1

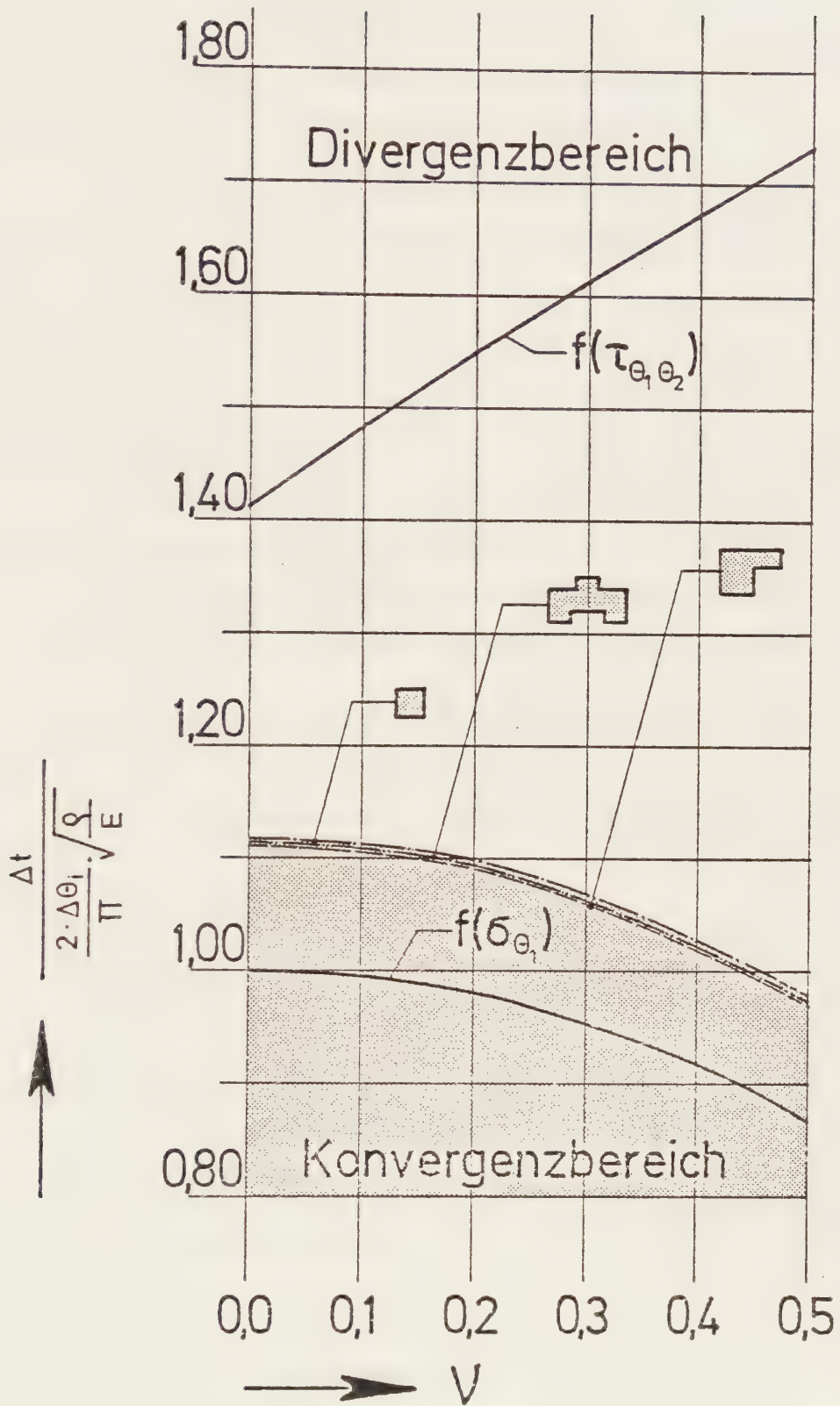


Bild 6.5

### 6.6 Abschätzung des Dämpfungskoeffizienten K

Der Dämpfungskoeffizient K beeinflusst die Rechenzeit und hat keinen Einfluß auf die Stabilität der Rechnung.

Die Dämpfung D ist mit dem Dämpfungskoeffizienten K durch folgende Gleichung verknüpft:

$$D = \frac{K}{\Delta t} \quad (6-36)$$

Um den Dämpfungskoeffizienten K für einen Scheibenstreifen bei einer longitudinalen Schwingung zu bestimmen, wird der Ausdruck für die kritische Dämpfung nach Hansson [22] ausführlicher betrachtet, welcher lautet:

$$D_{kr} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \cdot \frac{\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \quad (6-37)$$

Bei gleich großen Maschenweiten kann die Länge l gemäß Bild 6.6 folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \cdot m \cdot \Delta\theta \quad (6-38)$$

wobei m die Anzahl der Maschen auf der Scheibenlänge bedeutet.

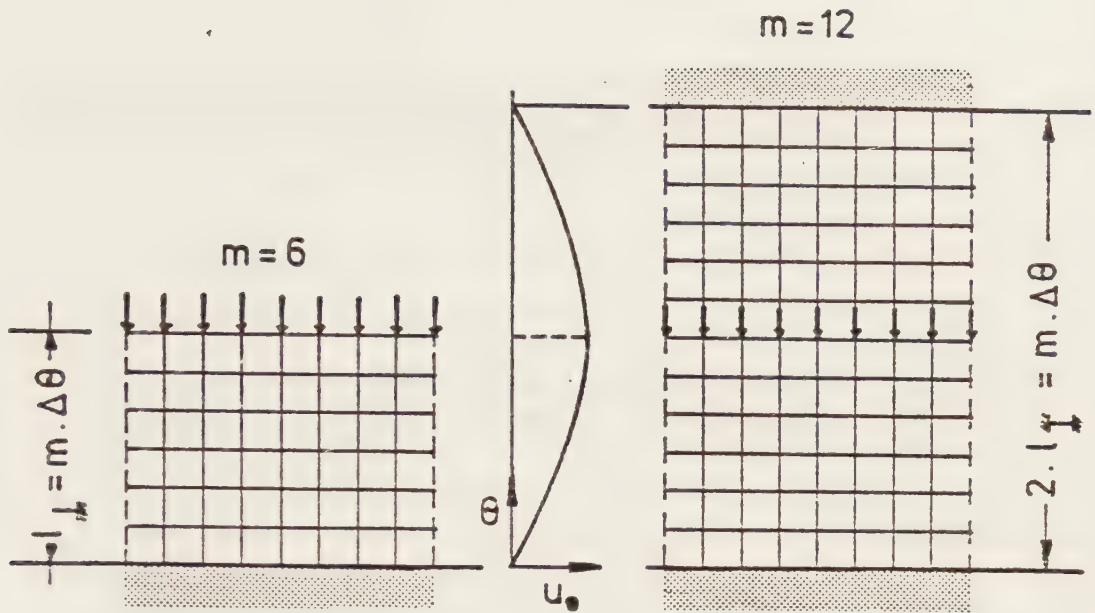


Bild 6.6

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (6-35), (6-36) und (6-38) folgt:

$$K_{Kr}^L \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = D_{Kr} \cdot \Delta t_{Kr} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{2}{m} \right) \cdot 1,10 \quad (6-39)$$

Aus Gleichung (6-39) ist zu ersehen, daß der kritische Dämpfungskoeffizient hauptsächlich von der Anzahl der Maschen abhängt.

Für ein gewähltes Zeitintervall  $\Delta t$  ergibt sich:

$$\Delta t = \Delta t_{Kr} \cdot \kappa ; \quad \kappa \leq 1 \quad (6-40)$$

$$D_{Kr} = \frac{K}{\Delta t} = \frac{K}{\Delta t_{Kr} \cdot \kappa} \quad (6-41)$$

Unter Berücksichtigung des gewählten Zeitintervalles  $\Delta t$  und der Gleichung (6-39) erhält man:

$$K^L \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{2,20}{m} \right) \cdot \left( \frac{\Delta t}{\Delta t_{Kr}} \right) \quad (6-42)$$

Hierbei ist für  $m$  etwa die größte vorhandene Maschenanzahl für eine bestimmte Richtung einzusetzen.

Beim Scheibenstreifen mit Transversalschwingungen erhält man für die kritische Dämpfung nach Hansson [22] folgenden Ausdruck:

$$D_{Kr} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (1 + \nu)}} \quad (6-43)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (6-35), (6-36) und (6-38) folgt:

$$K_{Kr}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{2,20}{m} \right) \cdot \sqrt{\frac{1 - \nu}{2}} \quad (6-44)$$

und entsprechend für eine Querkontraktion  $\nu = 0,2$  erhält man:

$$K^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{1,39}{m} \right) \cdot \left( \frac{\Delta t}{\Delta t_{Kr}} \right) \quad (6-45)$$

Um die optimale Rechenzeit zu erzielen, ist für  $\Delta t$  etwa 80 ... 90 % des kritischen Zeitintervalles  $\Delta t_{kr}$  einzusetzen.

Für praktische Zwecke ist der Dämpfungskoeffizient  $K$  etwa zwischen den beiden Werten  $K^L$  und  $K^T$  zu wählen.

Die theoretische Untersuchung des optimalen Dämpfungskoeffizienten wurde nur für den Scheibenstreifen unter bestimmten Lagerbedingungen durchgeführt. Um die theoretische Untersuchung zu bestätigen, wurden außerdem numerisch drei geometrisch ganz verschiedene Scheiben bei einer Querkontraktion  $V = 0,2$  um den optimalen Dämpfungskoeffizienten untersucht.

Die Werte für den Dämpfungskoeffizienten  $K$  nach den Gleichungen (6-42) und (6-45) sind in der Tabelle 6.2 zusammengestellt und mit numerischen Resultaten (in der Tabelle 6.2 ganz rechts) verglichen worden.

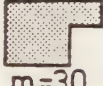
|                                                                                               | $\Delta t [s]$                               | $K^L$                                                                               |                                                                                     | $K^T$                                                                               |                                                                                       | $K_{min}^{opt}$              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
|                                                                                               | $\Delta t_{kr} [s]$                          |  |  |  |  | $K_{max}^{opt}$              |
| <br>$m=30$ | $8,50 \cdot 10^{-6}$<br>$9,30 \cdot 10^{-6}$ | 0,067                                                                               | 0,134                                                                               | 0,042                                                                               | 0,085                                                                                 | $0,050$<br>$\div$<br>$0,060$ |
| <br>$m=30$ | $3,30 \cdot 10^{-6}$<br>$3,71 \cdot 10^{-6}$ | 0,065                                                                               | 0,131                                                                               | 0,041                                                                               | 0,082                                                                                 | $0,048$<br>$\div$<br>$0,056$ |
| <br>$m=10$ | $17,0 \cdot 10^{-6}$<br>$18,7 \cdot 10^{-6}$ | 0,200                                                                               | 0,400                                                                               | 0,126                                                                               | 0,253                                                                                 | $0,250$<br>$\div$<br>$0,325$ |

Tabelle 6.2

In den Bildern 6.7 bis 6.10 sind die Abhängigkeiten zwischen den Geschwindigkeiten und Dämpfungskoeffizienten für verschiedene Zeitintervalle ( $n = \frac{t}{\Delta t}$ ) bei verschiedenen Scheiben dargestellt, aus welchen zu ersehen ist, daß für die optimale Rechenzeit eine bestimmte Streuung des Dämpfungskoeffizienten  $K$  angenommen werden kann. Dadurch ist eine genaue Ermittlung des optimalen Dämpfungskoeffizienten nicht notwendig und erforderlich.

Für praktische Zwecke genügt es, zuerst die Werte  $K^T$  und  $K^L$  für die beiden Scheibenstreifen (einseitig bzw. beidseitig eingespannt) zu bestimmen und den endgültigen Wert des Dämpfungskoeffizienten  $K$  zwischen den Werten  $K^T$  und  $K^L$  zu wählen.

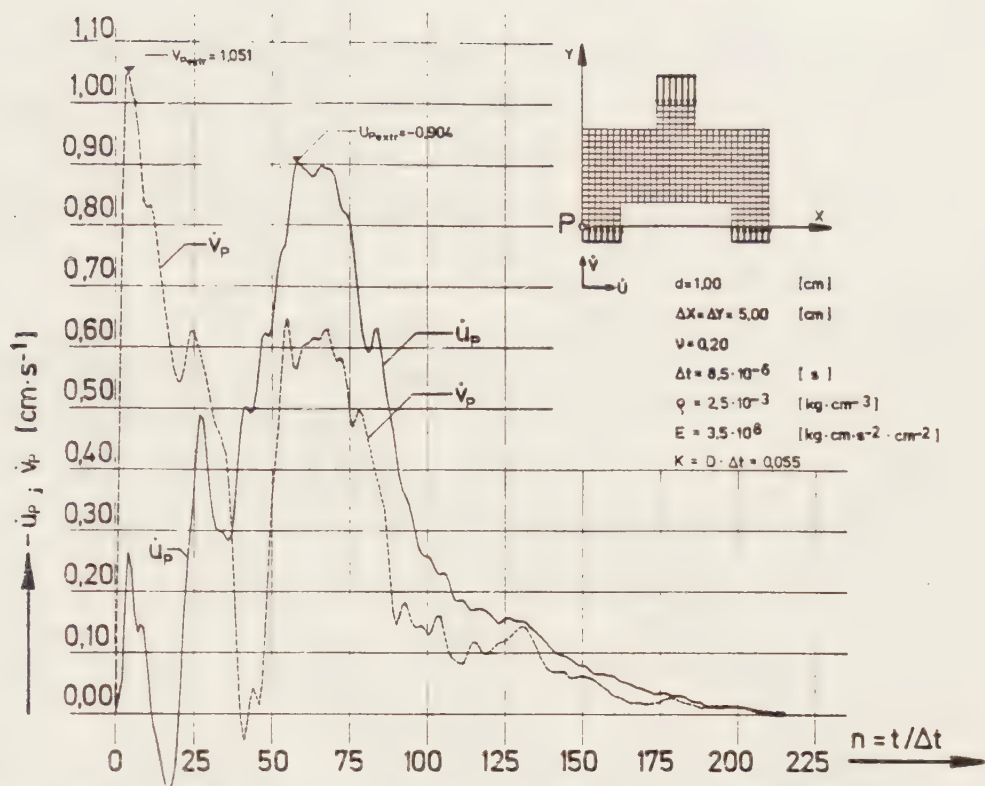


Bild 6.7 Zeitverlauf der Geschwindigkeiten

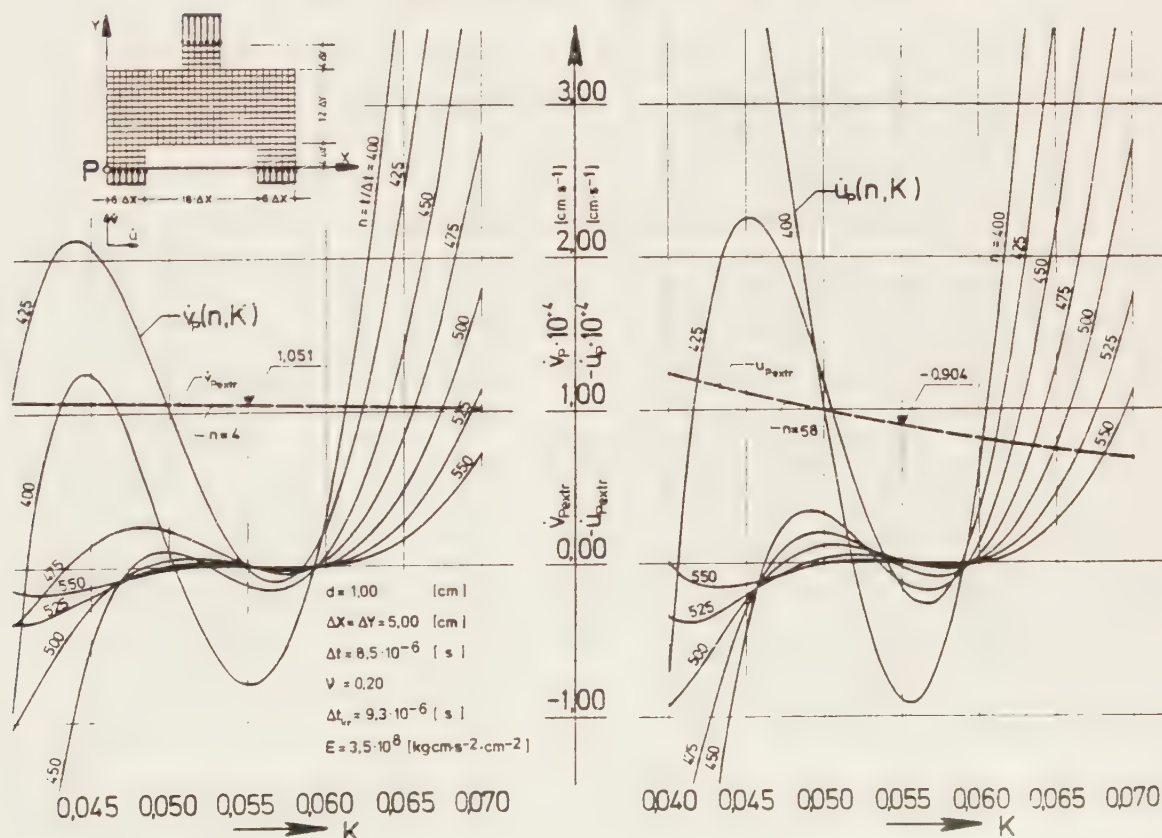
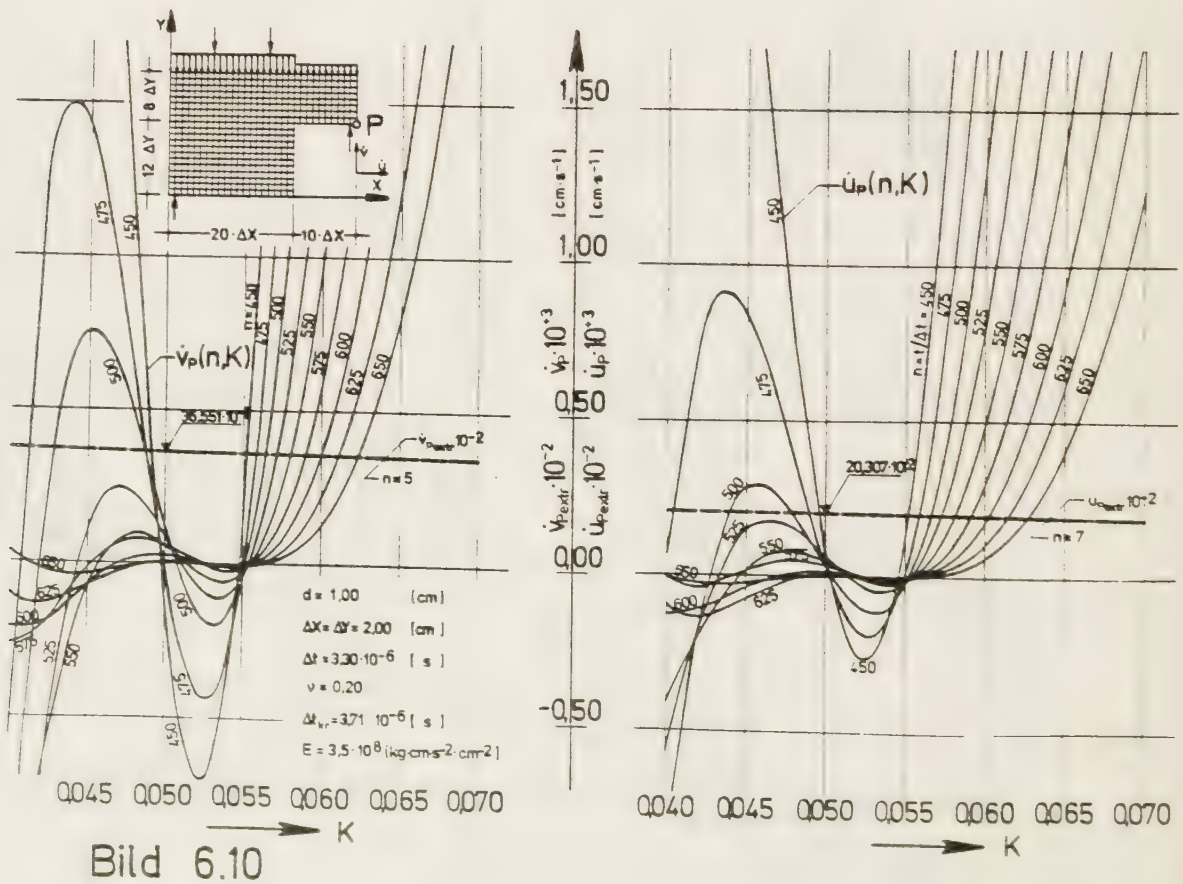
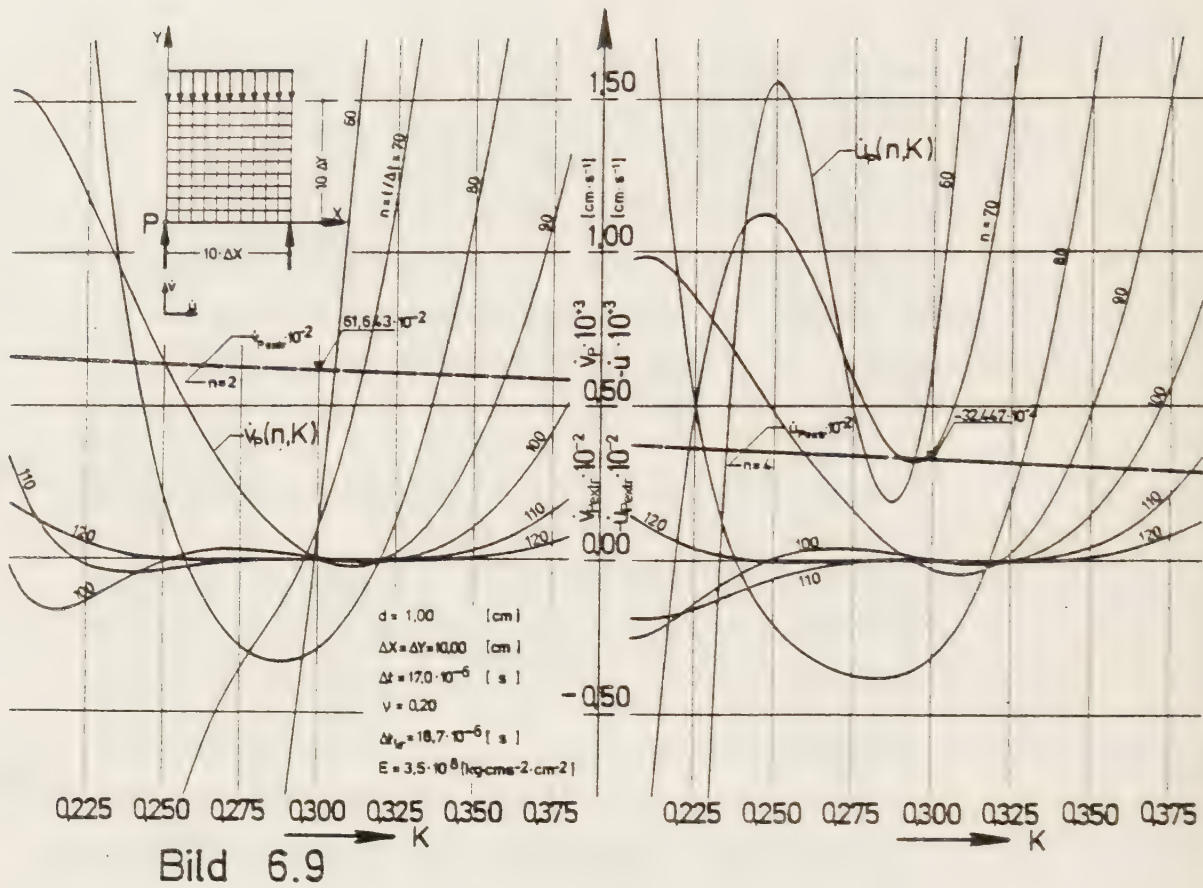


Bild 6.8



## 7. Anwendungsbeispiele

Beispiele sollen die Brauchbarkeit der Theorie zeigen. Es werden zuerst die Beispiele (Bild 7.1, 7.2 und 7.3) berechnet, welche unter dem Gesichtspunkt ausgewählt wurden, daß sie in der Literatur bereits vorhanden waren.

Ein Vergleich der Ergebnisse der einzelnen Berechnungen mit Vergleichswerten aus anderen, unabhängig durchgeführten Untersuchungen [18] , [31] , [32] und [36] zeigt eine sehr gute Übereinstimmung.

Die numerische Berechnung der Beispiele wurde auf der Rechenanlage TR 440 der Ruhruniversität in Bochum durchgeführt.

### 7.1 Rechteckige Scheiben

Im Bild 7.1 sind die Ergebnisse der Berechnung einer rechteckigen Scheibe dargestellt, welche mit den Resultaten von Andermann [18] Übereinstimmen.

Deutlich ist zu erkennen, daß am unteren Scheibenrand eine Gewölbewirkung entsteht. Diese ist durch die Lage der maximalen Zugspannung sowie durch den Schubspannungsverlauf am unteren Rand gekennzeichnet. Die  $\sigma_y$ -Spannungen ändern im Bereich der Symmetrieachse das Vorzeichen.

Die Untersuchung einer durchlaufenden Scheibe ist im Bild 7.2 dargestellt. Die endgültige Lösung wird analog zum Vorgehen bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme der Stabstatik aus der Lösung für das statisch bestimmte Hauptsystem und der mit dem Faktor  $\beta$  multiplizierten Lösung für die statisch Unbestimmte zusammengesetzt.

Der Faktor  $\beta$  ist so zu bestimmen, daß die Randbedingungen der Lager erfüllt sind.

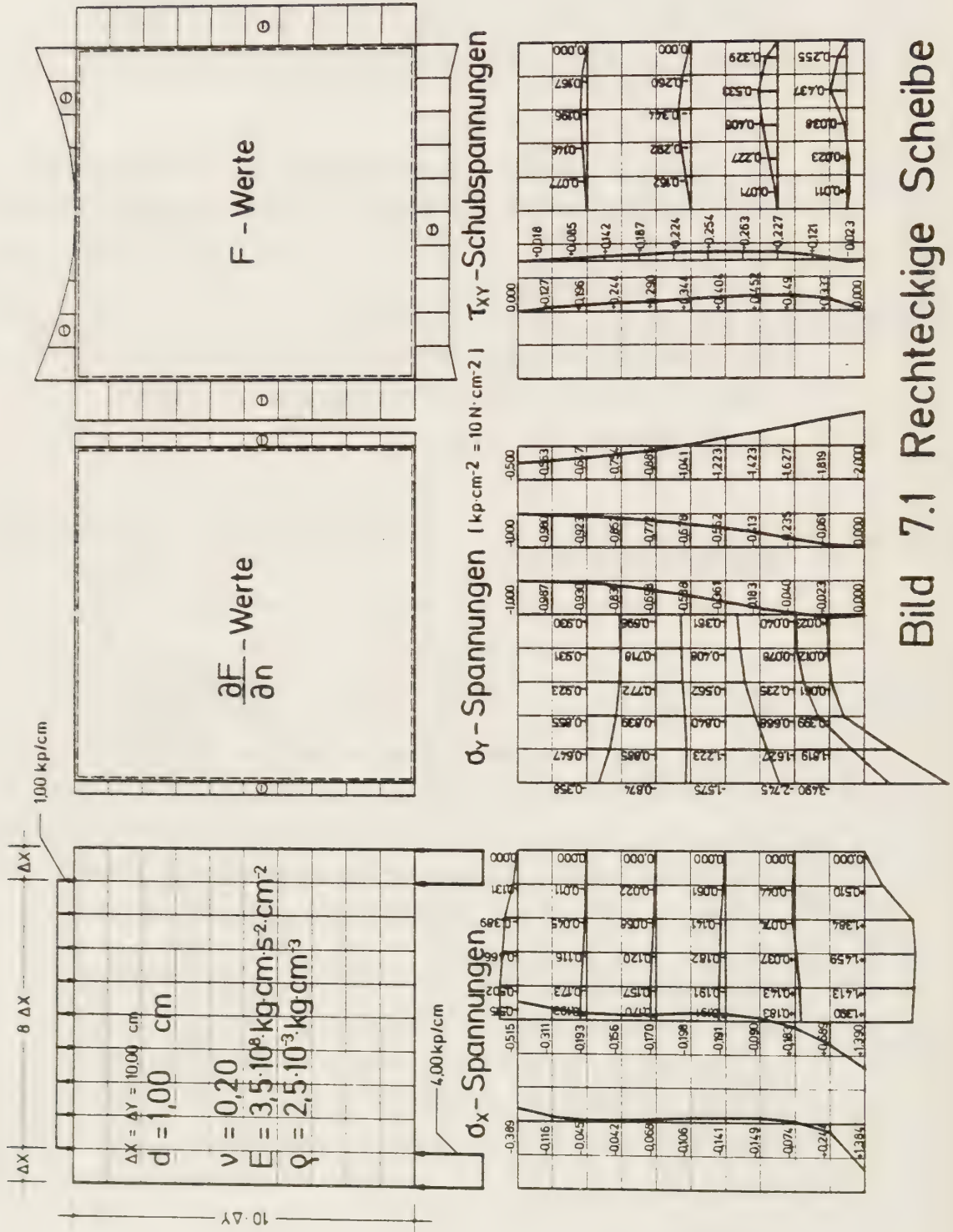
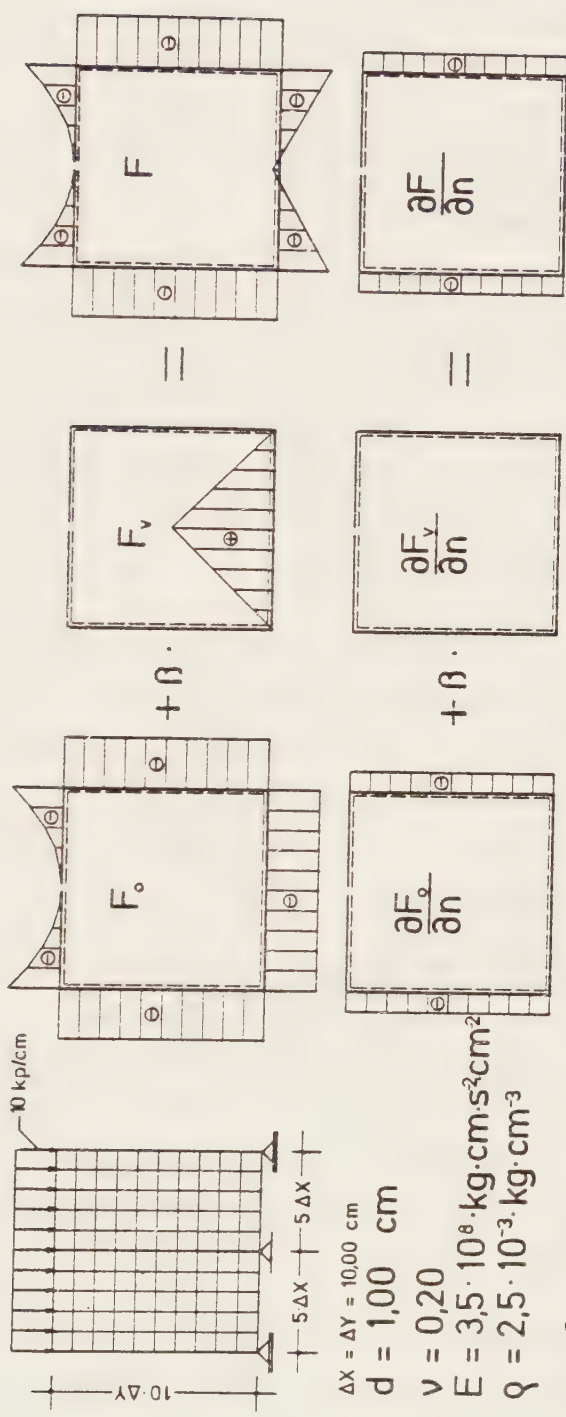


Bild 7.1 Rechteckige Scheibe



$\sigma_y$ - Spannungen  
 $\sigma_x$ - Spannungen [ $\text{kg} \cdot \text{cm}^{-2} = 10 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2}$ ]  $\tau_{xy}$ - Schubspannungen

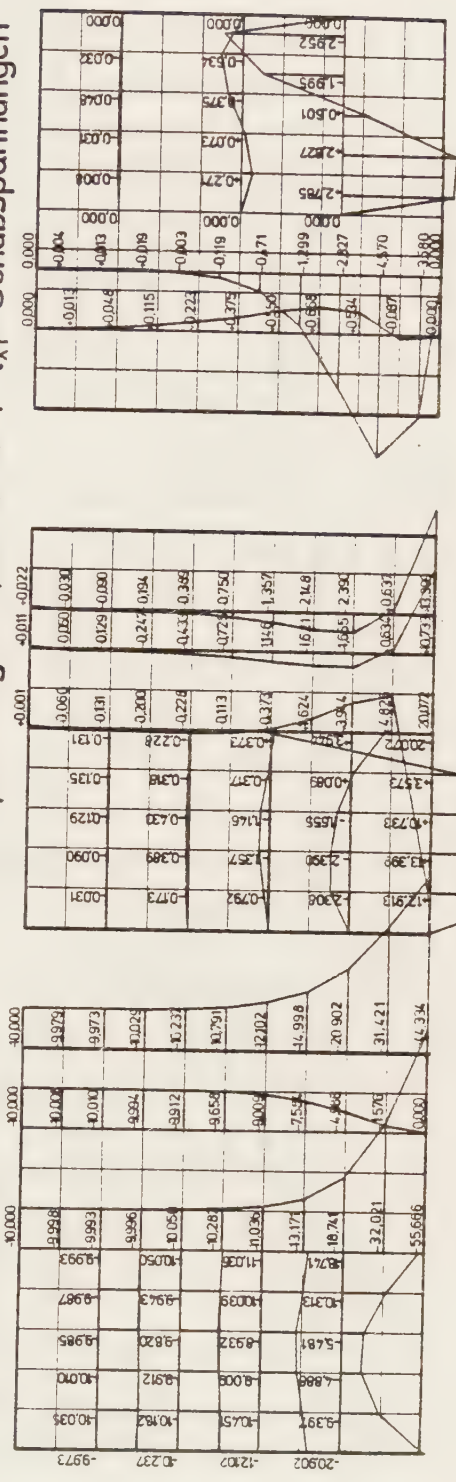


Bild 7.2 Durchlaufende Scheibe

## 7.2 Scheiben mit einspringenden Ecken

Um die theoretischen Resultate mit den Ergebnissen spannungsoptischer Untersuchungen sowie mit solchen Versuchsergebnissen, die nach der Potentialanalogie gewonnen wurden, zu vergleichen, wurde eine Tragwand (Bild 7.3 bis 7.12) berechnet, welche schon durch E. Zellerer [31] sowie durch Chr. Reißmann und K. Kietzer [32] untersucht worden ist.

Chr. Reißmann und K. Kietzer [32] haben die Tragwand (Bild 7.3) mit Hilfe der Potentialanalogie sowie mit Differenzenverfahren untersucht. Die Resultate beider Verfahren wurden durch Vergleich der Isopachenverläufe von dem Verfasser überprüft. Besonders an den einspringenden Ecken traten Mängel der Differenzenberechnung auf, die auf dem Bild 7.9 deutlich sichtbar werden.

Bei der Gegenüberstellung der eigenen Ergebnisse mit den nach der Potentialanalogie gewonnenen Resultaten von Reißmann und Kietzer [32] zeigt sich deutlich die sehr gute Übereinstimmung. Das ist besonders an den einspringenden Ecken erkennbar (Bild 7.8 und 7.9), wo die Isopachenlinien zusammenlaufen.

Nach den spannungsoptischen Ergebnissen, wie auch durch Hansson [22] bestätigt, ist in unmittelbarer Nähe des Eckpunktes eine Schubspannung zuzuordnen. In der vorliegenden eigenen Arbeit geschieht dies durch die zutreffende Erfassung der Randbedingungen in diesem Bereich automatisch. Die Schubspannung steigt bis unmittelbar in die Ecke steil an und fällt dann abrupt ab.

Im Bild 7.10 ist die Spannungsfunktion  $F$  räumlich dargestellt. Wegen der besseren Übersicht ist die zu untersuchende Tragwand umgedreht gezeichnet worden. In den Bildern 7.11 bis 7.12 sind räumliche Darstellungen der Spannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  der Scheibe gemäß Bild 7.3 aufgetragen worden.

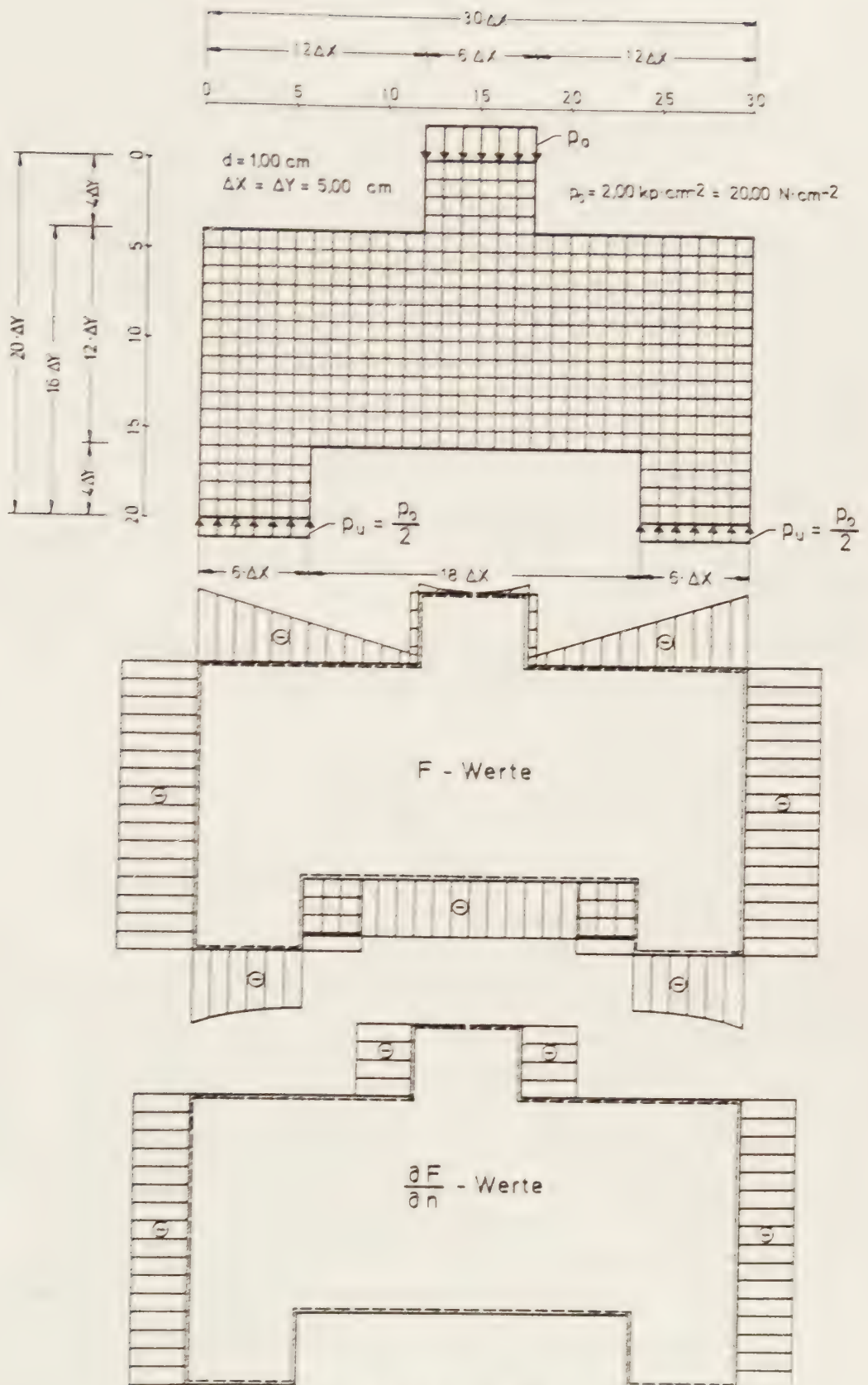


Bild 7.3

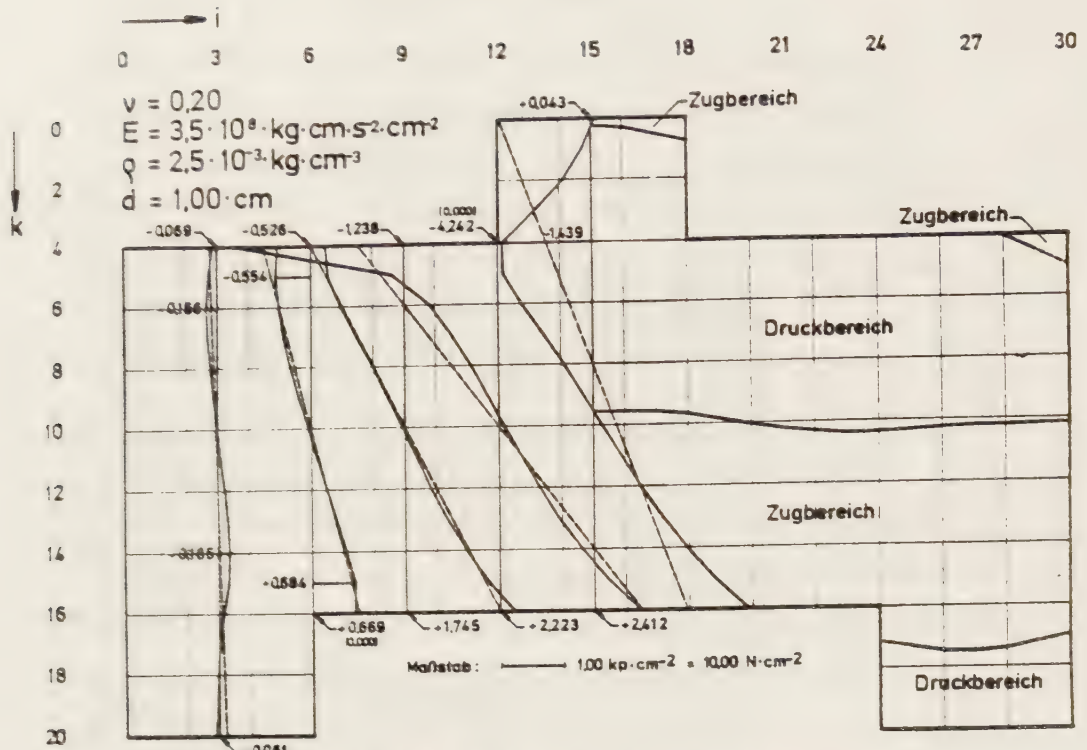


Bild 7.4  $\sigma_x$ -Spannungen

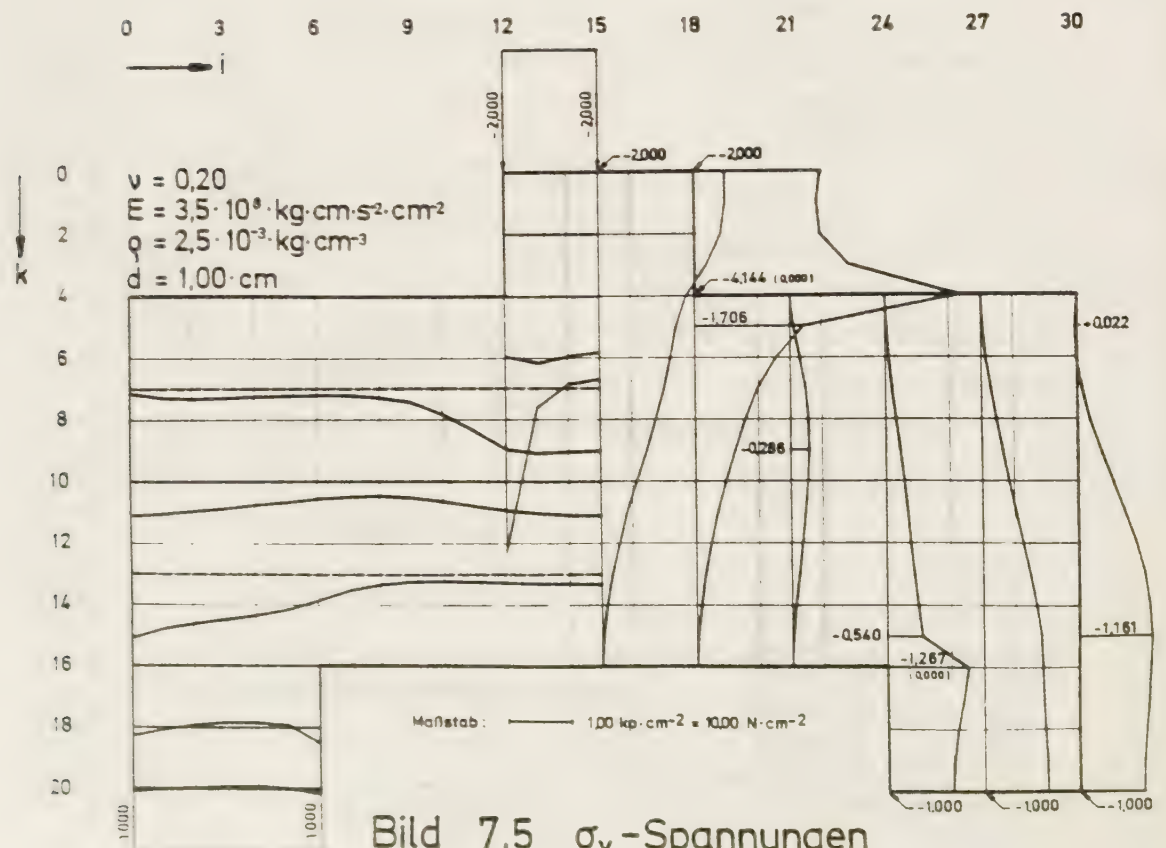


Bild 7.5  $\sigma_y$ -Spannungen

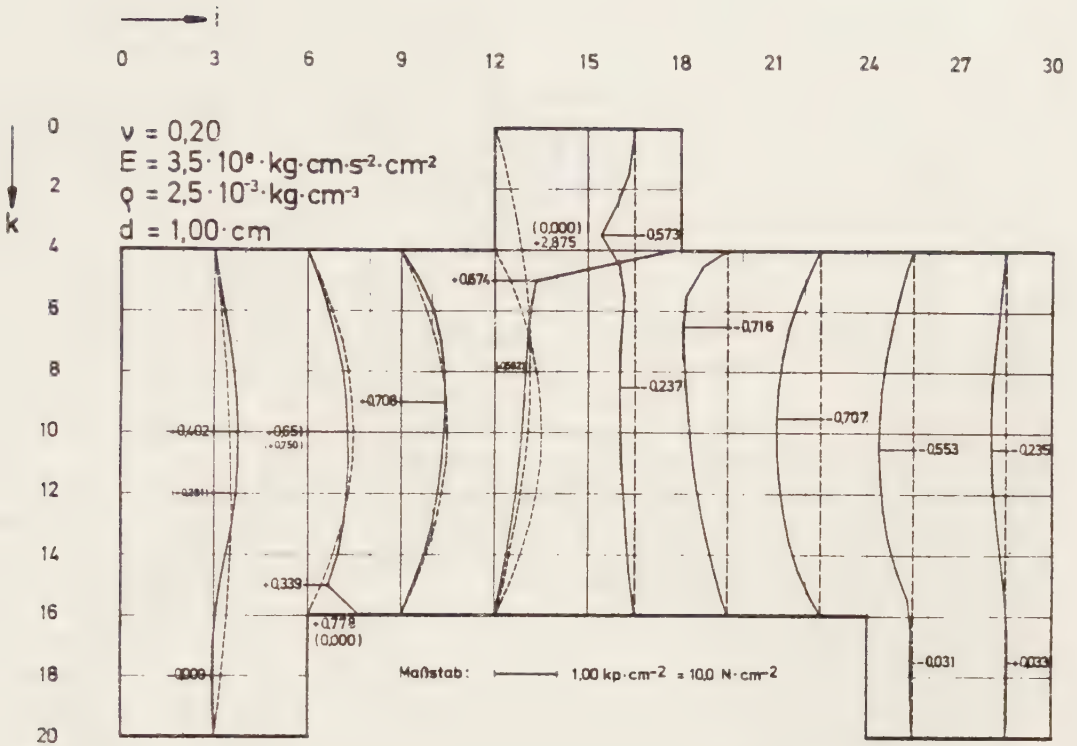


Bild 7.6  $\tau_{xy}$ -Schubspannungen

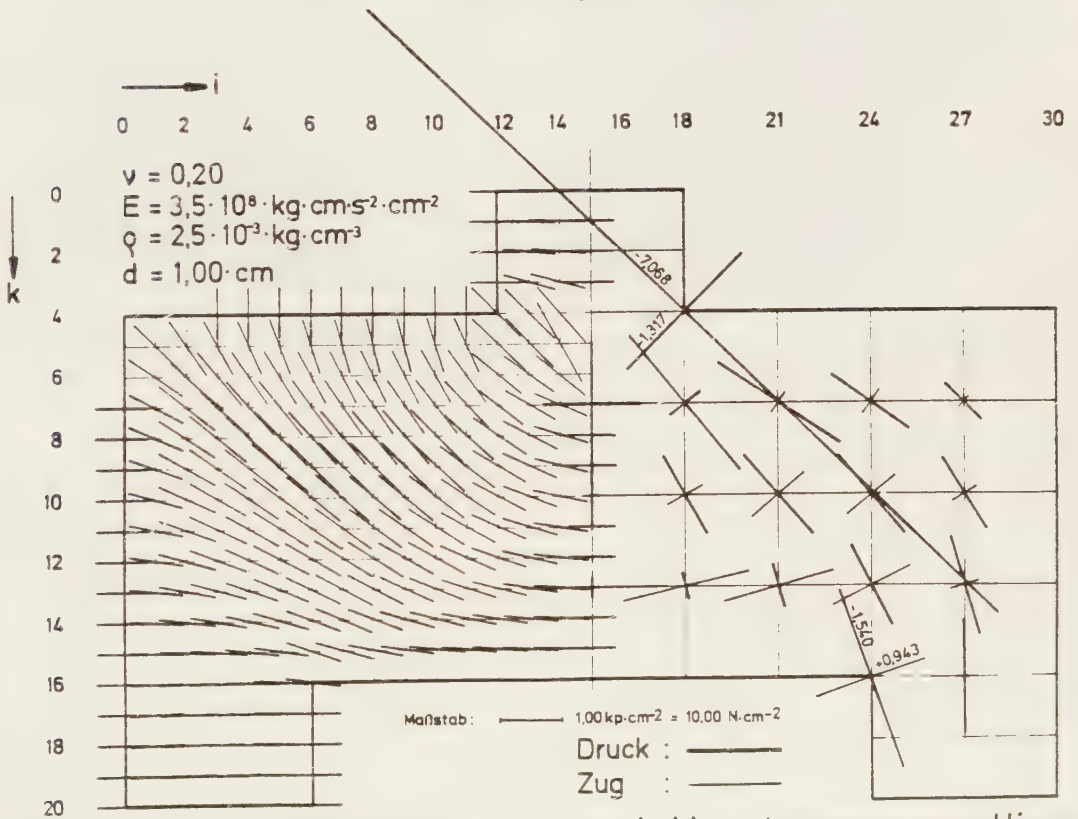


Bild 7.7 Hauptzugrichtungen und Hauptspannungsellipsen

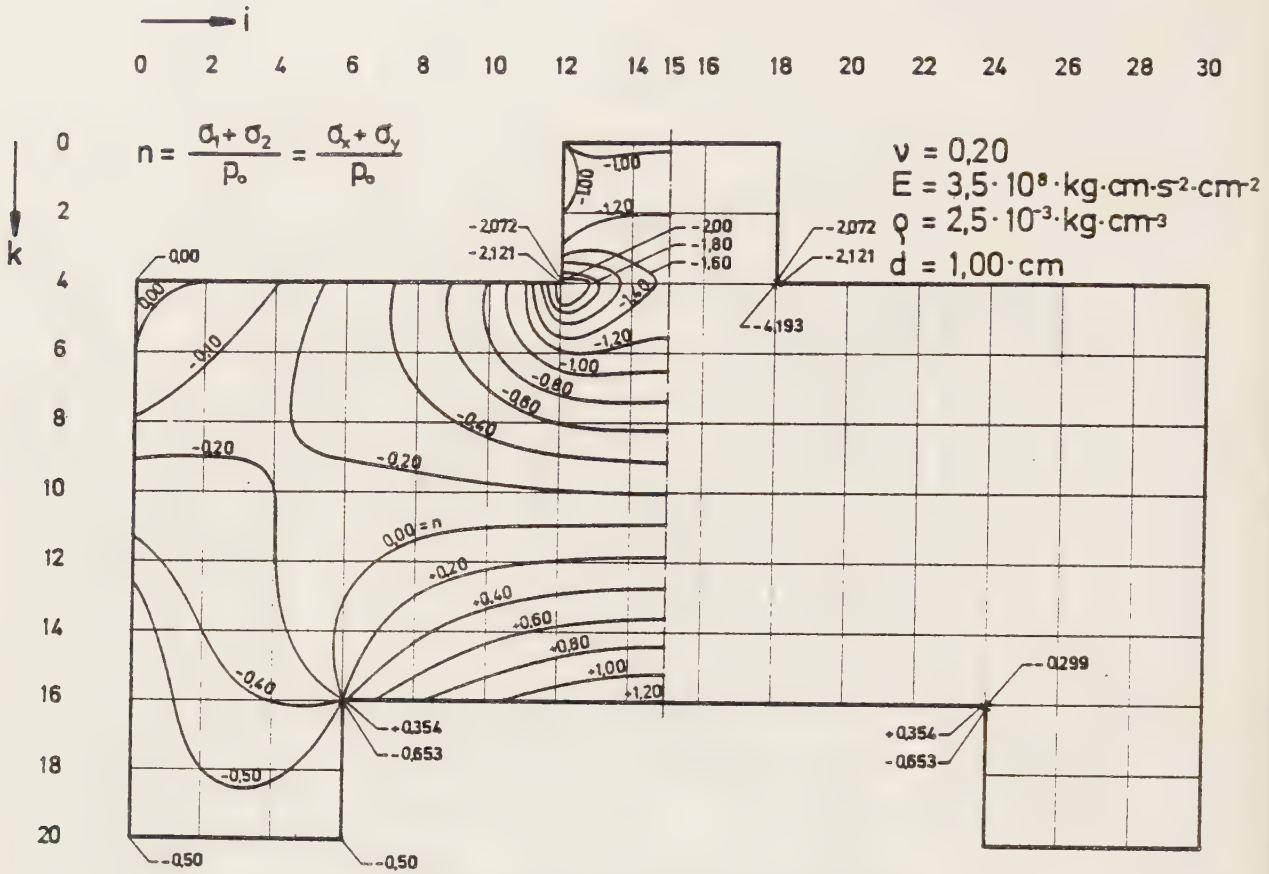


Bild 7.8 Isopachenlinien

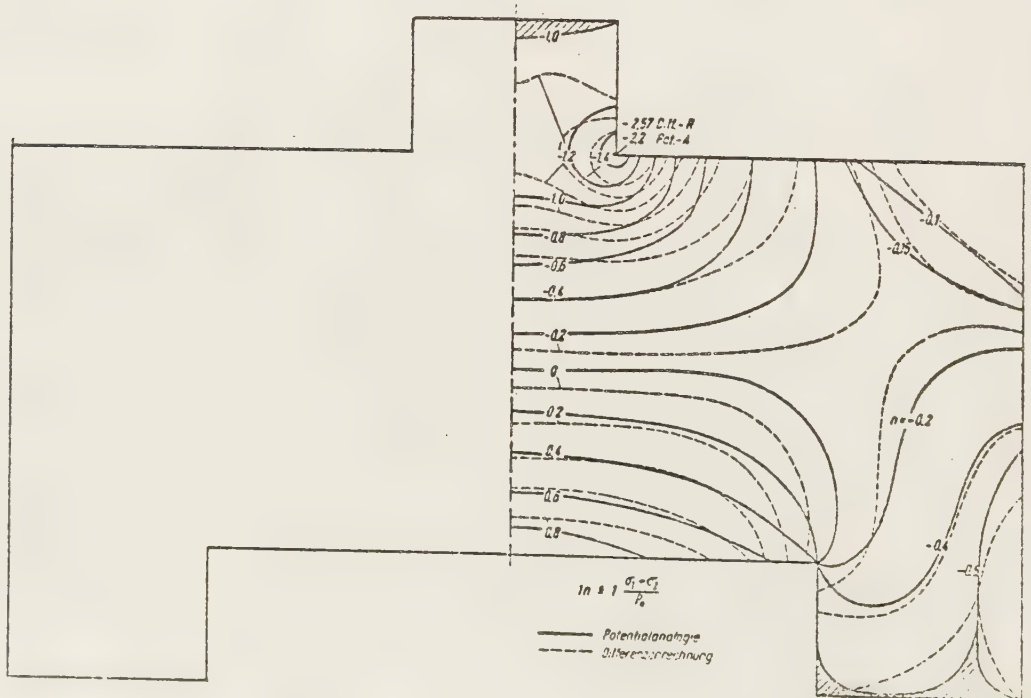


Bild 7.9 Isopachen nach [32]

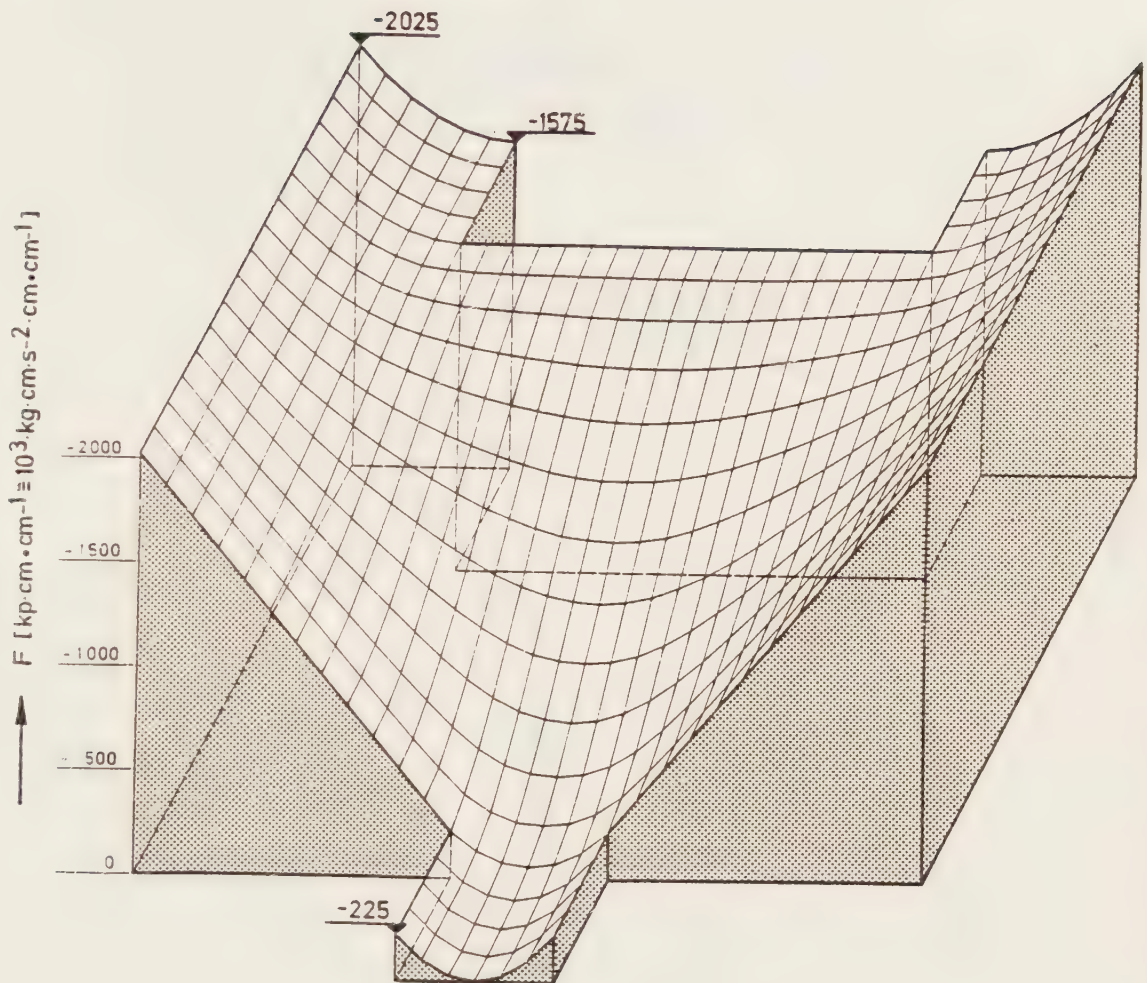


Bild 7.10 Spannungsfunktion  $F$

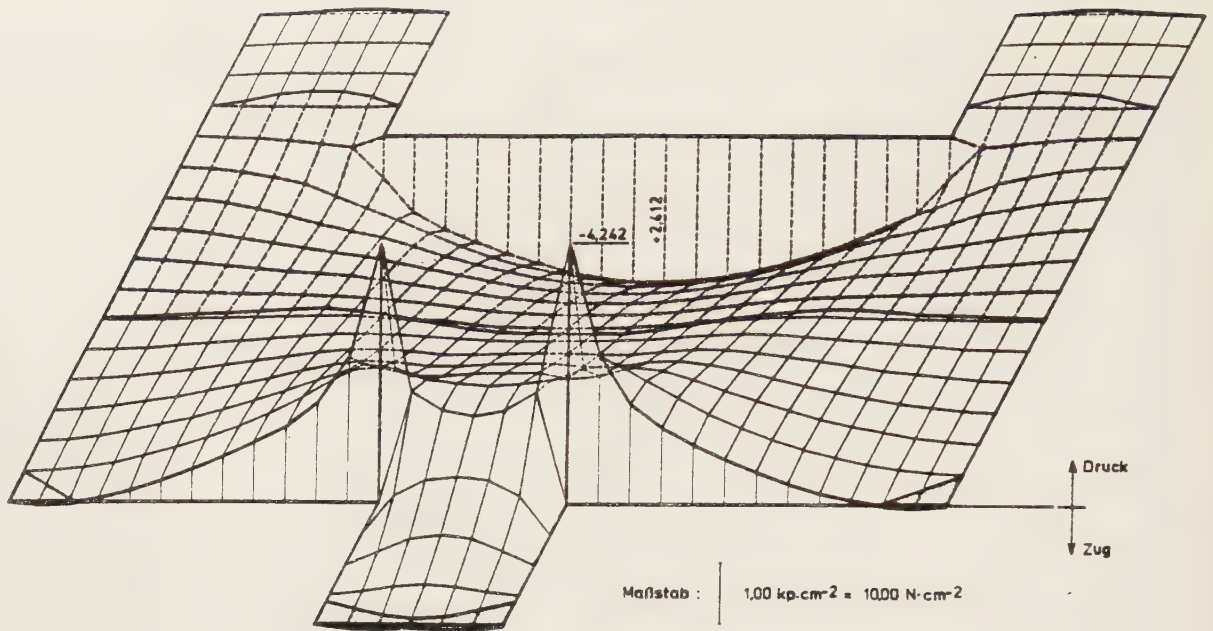


Bild 7.11  $\sigma_x$ -Spannungen

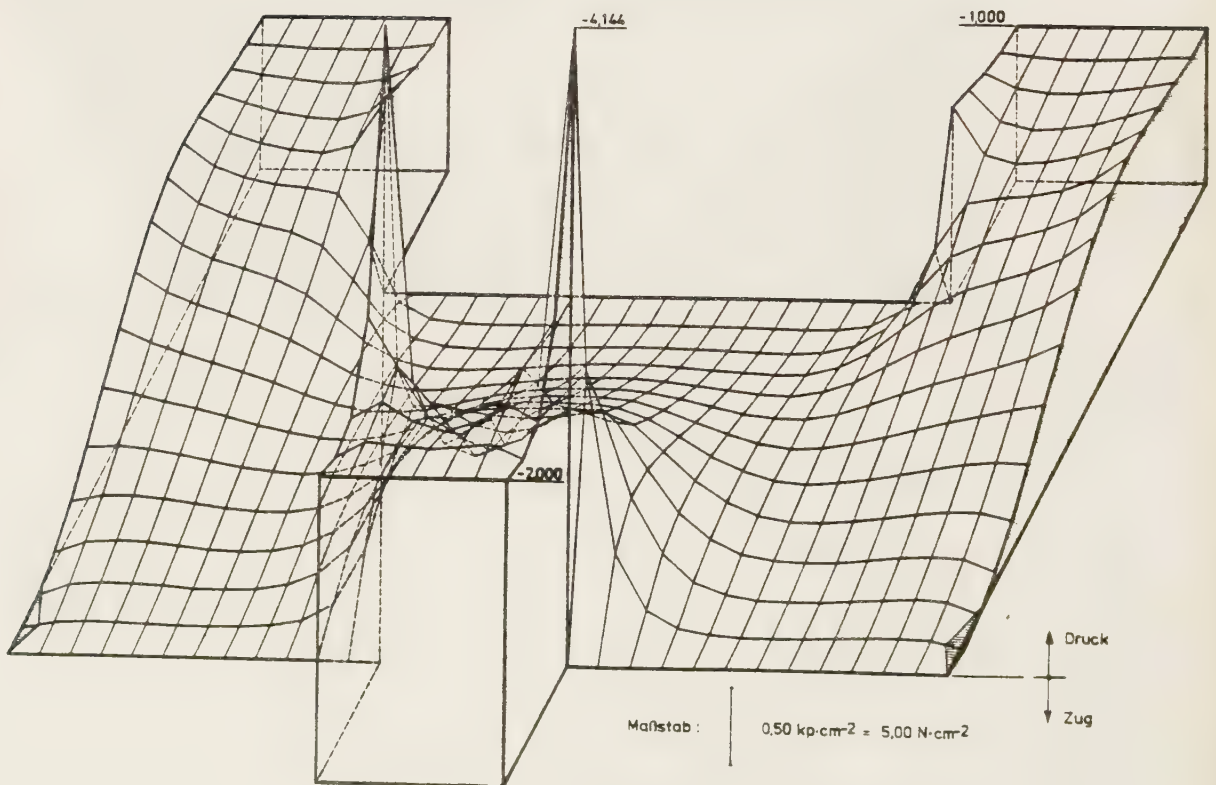


Bild 7.12  $\sigma_y$ -Spannungen

In den Bildern 7.13 bis 7.17 ist eine wandartige Scheibe, die durch allgemeine Belastung beansprucht ist, untersucht worden.

Die Ausgangswerte der Spannungsfunktion  $F$  und ihrer Ableitung  $\frac{\partial F}{\partial n}$  in Richtung der Normale sind im Bild 7.13 dargestellt.

Im Bild 7.15 sind die  $\sigma_y$ -Spannungen im Konsolenbereich interessant, da sie als Zugspannungen über dem vollen Bereich auftreten.

Ähnlich wie bei einer rechteckigen Scheibe ist auch hier im Bild 7.17 der Verlauf des Druckgewölbes deutlich zu sehen.

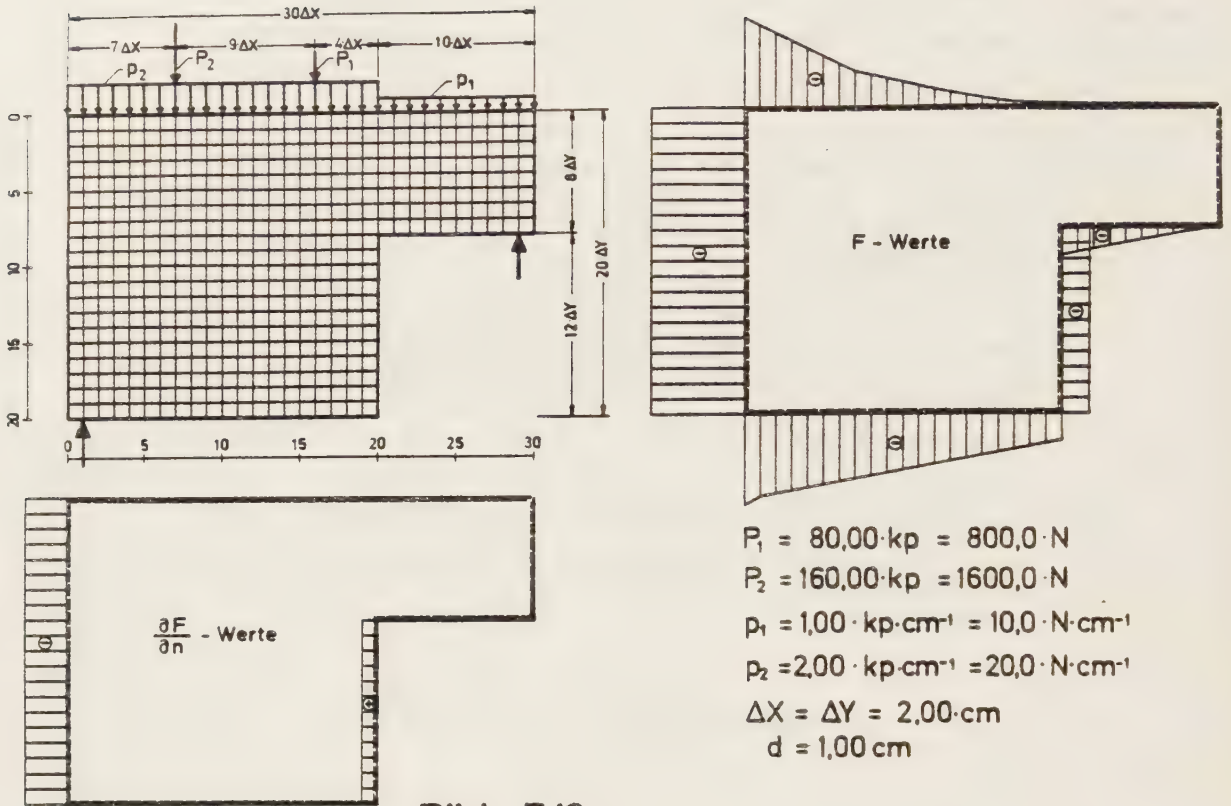


Bild 7.13

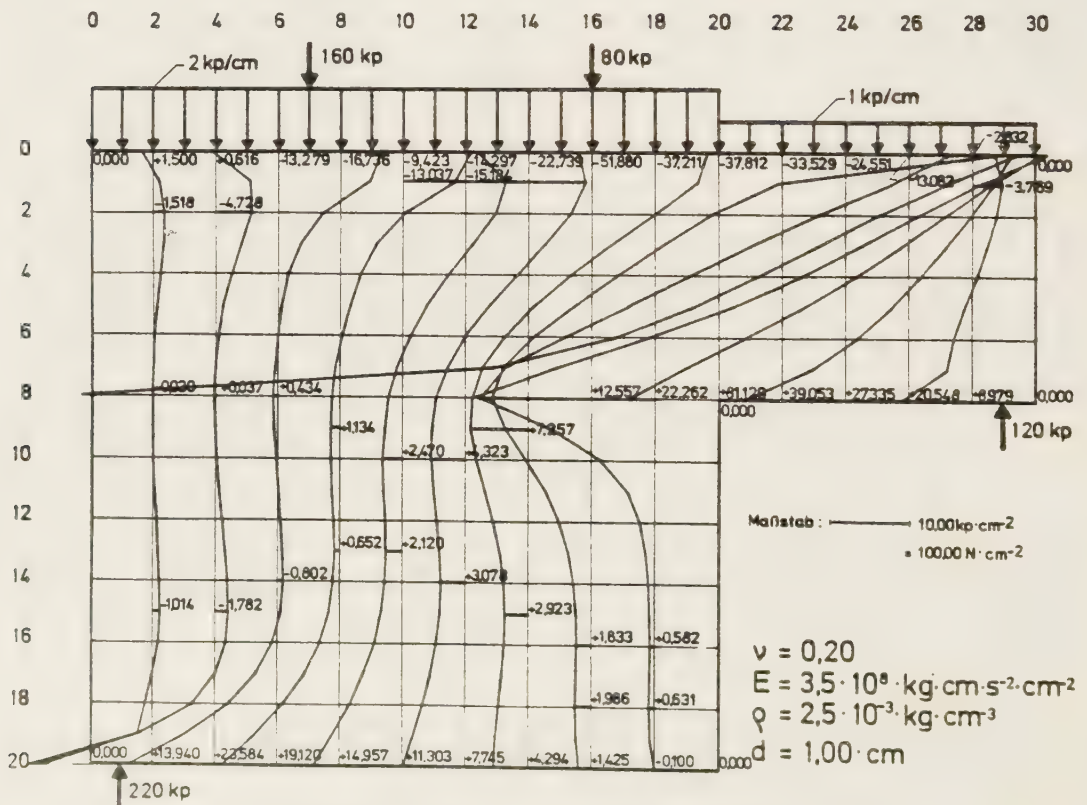


Bild 7.14  $\sigma_x$  - Spannungen

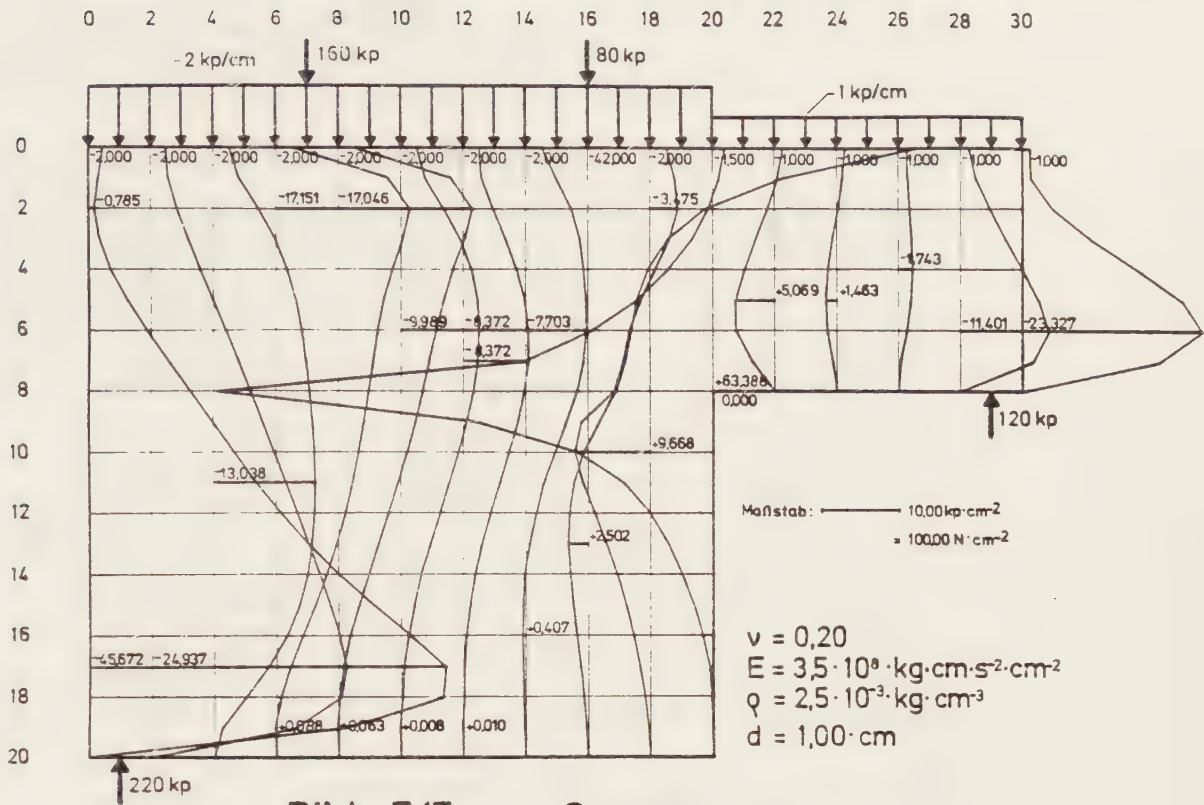


Bild 7.15  $\sigma_y$ -Spannungen

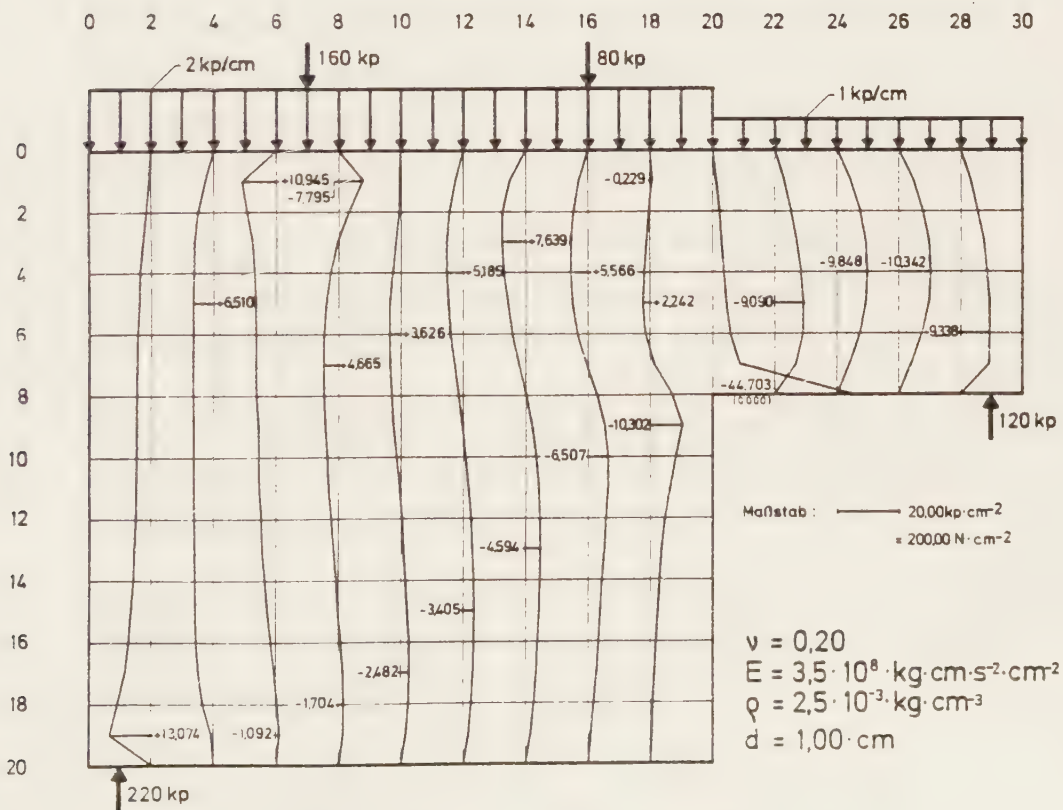


Bild 7.16  $\tau_{xy}$ -Schubspannungen

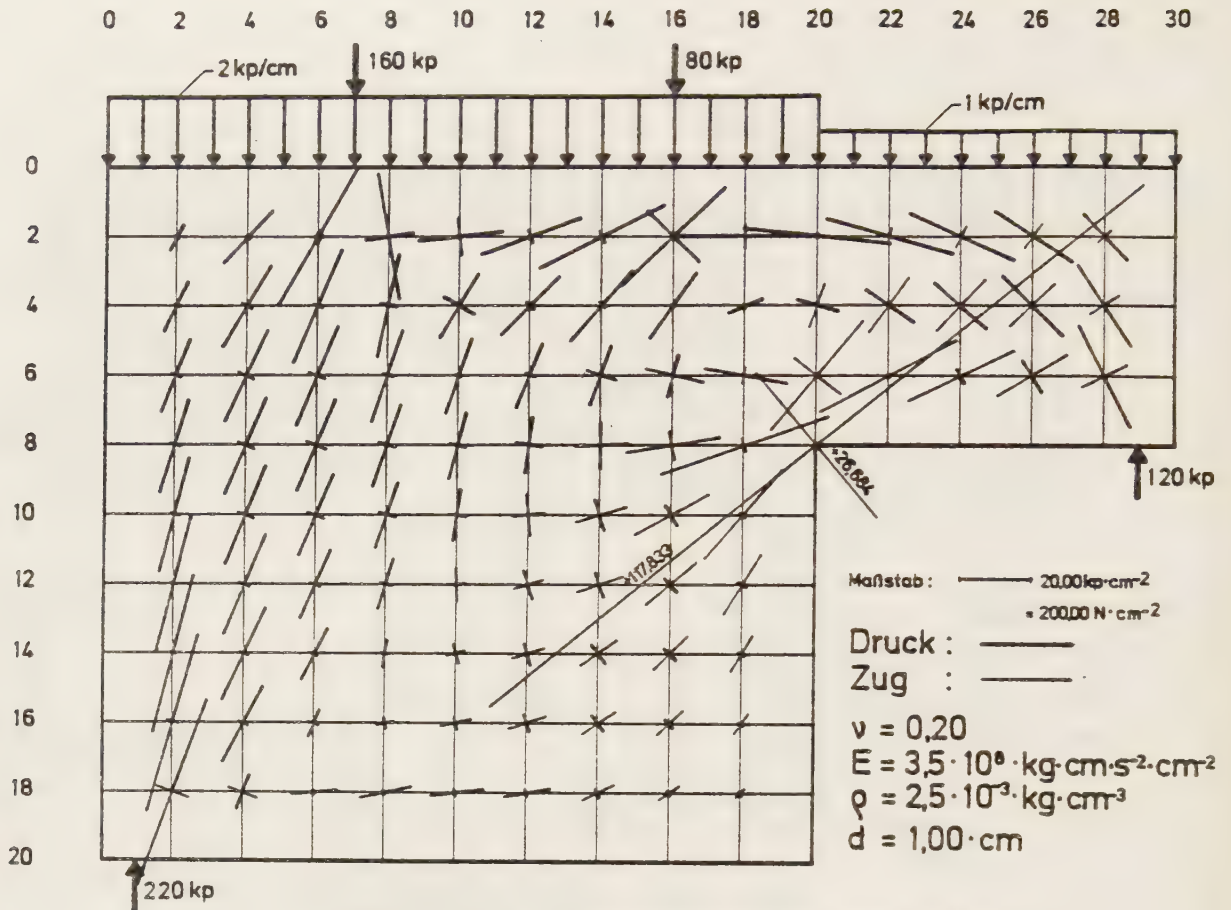


Bild 7.17 Hauptspannungsellipsen

## 8. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Spannungsfunktionen und der Spannungszustand einer Scheibe unter Berücksichtigung der Randbedingungen durch einen Ersatzstab numerisch ermittelt.

Die Randbedingungen von Scheiben mit beliebig vielen einspringenden Ecken werden durch die Biegemomente und Normalkräfte des Umrißstabes ausgedrückt [ 18 ] .

Die numerische Lösung der Spannungsfunktion und der Spannungen wird mit Hilfe der "dynamischen Relaxation" gewonnen, wobei die Übertragungsmatrix bzw. die Summationsgleichungen mit sehr großer Genauigkeit verwendet werden. Diese Genauigkeit und Empfindlichkeit sind anhand des Beispiels des Einmassenschwingers ausführlich gezeigt worden.

Da die Kriterien für das kritische Zeitintervall nach der vorhandenen Literatur nicht ausreichend sind, wird das kritische Zeitintervall bzw. die Stabilität der Rechnung genauer, und zwar an einem Maschenelement, untersucht.

Für mehrere Scheibentypen mit verschiedenen Belastungen wird das kritische Zeitintervall numerisch verfolgt und mit den theoretischen Ergebnissen verglichen.

Bei weiteren Beispielen hat sich gezeigt, daß auf das kritische Zeitintervall  $\Delta t_{kr}$  hauptsächlich die Normalspannungen im Vergleich zu den Schubspannungen von Einfluß sind.

Für die praktische Berechnung der Scheiben kann eine optimale Rechenzeit in Abhängigkeit von dem Dämpfungskoeffizienten  $K$  bestimmt werden.

Es hat sich herausgestellt, daß die Rechenstabilität wesentlich vom kritischen Zeitintervall abhängig ist und daß auf die Länge der Rechenzeit bzw. auf die Konvergenzgeschwindigkeit nur der Dämpfungskoeffizient  $K$  den Haupteinfluß hat. Dieser Dämpfungskoeffizient ist im wesentlichen nur von der Anzahl der Maschenelemente in einer Richtung, und zwar von der Richtung mit der größten Anzahl von Maschenelementen, abhängig.

Für einspringende Ecken wurde eine besondere theoretische Untersuchung der Randbedingungen durchgeführt. Die rechnerischen Ergebnisse werden mit denen nach der Potentialanalogie nach Chr. Reißmann und K. Kietzer [ 32 ] verglichen. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse.





## Lebenslauf

Geboren: Am 19. September 1936 in Ponoviče, Kreis Ljubljana als Sohn des Finanzinspektors Franz Topole und seiner Ehefrau Aurelie Topole, geborene Bullinger.

Schulbildung: 1942 - 1945 Besuch einer Knabenvolksschule in Ljubljana.  
1945 - 1946 Besuch einer Volksschule in Maribor.  
1946 - 1956 Besuch des Städtischen Gymnasiums in Ljubljana und Abschluß mit Erlangung der Hochschulreife.

Studium: 1956 - 1961 Studium der Fachrichtung Bauingenieurwesen an der Universität in Ljubljana - Fakultät für Architektur, Bauwesen und Geodäsie.  
22.4.1961 Diplom-Hauptprüfung an der Universität in Ljubljana.

Berufstätigkeit: 1961 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Bodenmechanik in Ljubljana,  
1962 Militärdienst,  
1963 Vertreter des Bauleiters bei einer Baufirma in Ljubljana,  
1963 - 1965 Statiker bei einer Baufirma in Schwäbisch-Hall,  
1965 - 1971 Statiker und Projektleiter im Ingenieurbüro Dr.-Ing. H. Homberg in Hagen,  
1971 - 1974 Statiker und Projektleiter im Ingenieurbüro Prof. Dr.-Ing. W. Zerna in Bochum,  
ab 1974 Statiker und Projektleiter im Ingenieurbüro Prof. Dr.-Ing. Dr. E.h. W. Zerna - Dr.-Ing. H. Schultz in Bochum.





